

УДК 519.1 + 519.2
ББК 22.17

ДОСТИЖЕНИЕ КОНСЕНСУСА МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМОЙ В УСЛОВИЯХ ПЕРЕМЕННОЙ ТОПОЛОГИИ И АДДИТИВНОГО СЛУЧАЙНОГО ШУМА

Шейпак С. И.¹

(Московский государственный университет
им. М.В.Ломоносова, Москва)

Исследуется многокомпонентная система с фиксированным набором частиц в дискретном времени. В основе процесса синхронизации лежит взаимодействие частиц согласно некоторому семейству графов, вершины которых соответствуют частицам системы. В каждый момент времени система описывается вектором, компоненты которого меняются итеративно: состояние каждого агента линейно определяется через состояния его соседей в предыдущий момент времени и аддитивную случайную компоненту, а также связи между частицами меняются со временем. Таким образом, эволюция вектора состояния системы есть итеративное умножение на стохастические матрицы из некоторого класса и добавление случайного вектора. В статье изучается величина, характеризующая удалённость системы от положения консенсуса, и приводятся условия, накладываемые на семейство графов и достаточные для получения верхней оценки для этой величины. Кроме того, предлагается некоторая модифицированная модель, обеспечивающая верхнюю оценку при итерациях с графами, на которые наложены чуть более слабые условия.

Ключевые слова: многокомпонентные системы, граф коммуникаций, консенсус, синхронизация, случайный шум.

¹ Святослав Игоревич Шейпак, аспирант (s.sheypak@gmail.com).

1. Введение

В данной работе изучается модель многокомпонентной системы, эволюция которой происходит в дискретные моменты времени. Состояние каждой частицы (часто в нашей работе мы вместо слова «компонента» будем использовать его синонимы: частица, агент, узел) представляет собой функцию, принимающую значение в \mathbb{R} . Взаимодействие частиц происходит согласно некоторой топологии, где под топологией мы понимаем неориентированный граф, вершины которого соответствуют частицам, а рёбра — парам частиц. Для каждого агента граф определяет круг других частиц, согласно состоянию которых агент обновляет своё состояние. При этом обмен данными между частицами происходит с погрешностями: сигнал от соседей приходит с некоторым случайным шумом, а также с течением времени меняются связи между частицами.

Поведение модели имитирует обмен данными между некоторыми датчиками, приборами или иными объектами. При этом в данной задаче полагается, что число соседей, которое каждая частица может иметь, прописано у каждого объекта на уровне технической характеристики и не меняется со временем. Таким образом, на графы, согласно которым происходит обмен, накладывается ограничение: степени вершин остаются прежними и являются неизменяемым параметром системы. Мотивацией этого требования может служить то, что легче или дешевле перенаправлять сигналы, чем менять характеристики частиц, как например в системе воздушного сообщения легче изменить направления рейсов, чем расширять и сужать вместительность аэродромов. Или же можно представить коммутацию устройств, у каждого из которых есть фиксированное число физических портов и изменяются лишь схемы подключений приборов друг к другу.

Подобные модели могут использоваться в задачах регулирования нагрузки на серверы: имеется множество серверов, на которые приходят запросы пользователей. Во избежание отказов серверы перенаправляют пришедшие к ним запросы на другие

серверы, стараясь не допустить перегрузки из-за чрезмерно большого числа поступивших запросов. Для этого серверы объединяют в кластеры, внутри которых происходит перераспределение нагрузки. Возникает задача: как управлять процессом формирования кластеров так, чтобы удерживать систему в состоянии, наиболее близком к равномерному распределению нагрузки по серверам системы.

Похожие задачи уже изучались ранее в многочисленных работах. Так в [7, 11, 13] рассматриваются модели с переменной топологией. В [13] исследуется модель с переменными весами в непрерывном времени, а в [7, 11] — в дискретном. В [14] частицы рассматриваются как точки на плоскости, и топология связей между агентами связана с расстоянием между ними. Работа [8] посвящена изучению модели в постоянной топологии, но с аддитивным шумом. В [3] изучается система переменной топологии в дискретном и непрерывном временах, а также синхронизация с лидером, но при этом динамика системы является детерминированной. Авторы [2] изучают асимптотическое поведение детерминированной системы синхронизации на ориентированных графах. В [1] рассматривается дифференциальная модель достижения консенсуса и приводится предельная характеристика агентов в терминах алгебраических свойств матрицы Лапласа. Что касается изучения стохастических моделей, в работах [9] и [10] описываются модели с топологией специального вида: связи между частицами изменяются с некоторой периодичностью, также добавляется случайный шум. В работе [4] тоже рассматривается задача со случайным шумом, время непрерывно. Изучается консенсус динамической системы с точки зрения управления.

В данной же работе изучается многокомпонентная система, в которой, во-первых, связи между частицами меняются с течением времени, а во-вторых, эволюция происходит с помехами в виде некоррелированного аддитивного шума. Исследуется величина, являющаяся показателем того, насколько система далека от положения синхронизации, и получена оценка на предельное поведение этой величины. Кроме этого, во второй части статьи пред-

лагается несколько модифицированная система обмена данными, применение которой позволяет получить оценку предельной рассинхронизации системы для произвольного семейства графов с постоянным набором степеней вершин.

2. Основные обозначения

Мы будем придерживаться следующих обозначений: состояние системы в каждый момент времени описывается вектором, компоненты которого являются значениями каждой из частиц:

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

Зафиксируем набор

$$(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n.$$

Определение 1. Скажем, что семейство графов $\mathcal{G} = \{G\}$ удовлетворяет условию (d_1, \dots, d_n) , если выполнено следующее:

1. У всех графов G семейства \mathcal{G} общее множество вершин: $V_G = \{1, \dots, n\}$.
2. При каждой вершине i каждый граф G имеет петлю $(i, i) \in E_G$.
3. Все графы семейства неориентированы.
4. Мощность множества соседей вершины i в графе G равна d_i для любого графа семейства

$$|N(i, G) = \{j : (i, j) \in E_G\}| = d_i \quad \forall G \in \mathcal{G}.$$

В каждый момент времени t для системы определён граф $G(t) \in \mathcal{G}$, удовлетворяющего условию (d_1, \dots, d_n) . Вектор $x(t)$ меняется по следующему правилу:

$$x_i(t+1) = \frac{1}{d_i} \sum_{j \in N(i, G(t))}^n x_j(t) + w_i(t),$$

где $w(t) = (w_1(t), \dots, w_n(t))^T$ — случайный шум, обладающий следующими свойствами:

$$(1) \quad \begin{aligned} & \{w(t)\}_{t \in \mathbb{N}_0} - \text{н.о.р. случайные векторы,} \\ & Ew(t) = (0, \dots, 0)^T, \\ & Ew(t)w^T(t) = \text{diag}(\nu_1, \dots, \nu_n). \end{aligned}$$

Подобную эволюцию системы можно записать в матричном виде. Для этого каждому графу мы ставим в соответствие матрицу

$$A(t) = (a_{ij}(t))_{n \times n} : a_{ij}(t) = \frac{I(j \in N(i, t))}{d_i}.$$

Матрицы $A(t)$ неслучайны, они однозначно восстанавливаются по последовательности графов $\{G(t)\}$. На самом деле это матрицы инцидентности неориентированных графов, каждая из строк которых разделена на степень соответствующей вершины. В терминах векторов эволюция системы есть итеративный процесс, описываемый уравнением

$$(2) \quad x(t+1) = A(t)x(t) + w(t).$$

Мы говорим, что система синхронизирована (находится в состоянии консенсуса) в момент времени t_0 , если, $x(t_0) = \bar{x}(t_0)\mathbf{1}$, где $\bar{x}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t)$, $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$. Заметим, что в случае отсутствия шума ($w(t) = 0 \forall t \geq 0$), если в какой-то момент времени t_0 система синхронизирована, то вектор $x(t)$ при $t \geq t_0$ больше не меняется и во все последующие моменты система остаётся синхронизированной ($x(t) \equiv x(t_0)$, $t \geq t_0$). Для таких моделей можно изучать вопрос о сходимости системы к синхронизированному состоянию или о предельном значении $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$. Геометрически синхронизация означает, что вектор $x(t)$ оказывается в одномерном подпространстве, натянутом на вектор $\mathbf{1}$. В нашей же задаче добавляемый на каждом шаге случайный шум выводит вектор $x(t)$ за пределы этого подпространства и объектом нашего изучения становится квадрат l_2 -расстояния между вектором $x(t)$ и линейной оболочкой вектора $\mathbf{1}$:

$$\Sigma(t) = E\|x(t) - \bar{x}(t)\mathbf{1}\|_2^2.$$

Можно заметить, что $\bar{x}(t) = \frac{\langle x(t), \mathbf{1} \rangle}{\langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle}$. Поэтому то, что вычитается из $x(t)$ в выражении выше, есть в точности ортогональная проекция на рассматриваемое подпространство.

Процесс $x(t)$, безусловно, является марковским, и можно было бы изучать вопрос предельного распределения, но поскольку топология $G(t)$ постоянно меняется, нам хотелось хотя бы получить грубую оценку сверху на величину

$$\Sigma_{ss} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Sigma(t).$$

В терминах данной модели можно описать задачу об управлении системой серверов. Вершины $\{1, \dots, n\}$ отвечают серверам. Каждому серверу в каждый момент приписывается вещественное число $f_i(t)$, характеризующее степень загруженности данного сервера. Аддитивный шум $w(t)$ выступает в роли поступивших запросов, которые меняют нагрузку на серверы системы. Ребра графа $G(t)$ отвечают разбиению множества серверов на кластеры: сервер пытается выровнять нагрузку со всеми серверами, с которыми он соединён рёбрами графа. Ситуация, когда система синхронизирована, в точности отвечает равномерной нагрузке на серверы системы. Можно изучать вопрос об управлении переменной топологией: какими свойствами должна обладать последовательность $\{G(t)\}$, чтобы система была способна выравнять нагрузку.

Задачи синхронизации многокомпонентных систем в различных постановках изучены целым рядом авторов. Например, в [7, 11] изучаются системы с переменными топологией и отсутствием шума. В этих работах авторами приводятся условия, налагаемые на последовательность графов и достаточные для синхронизации системы. В [8] топология постоянна, но присутствует случайный аддитивный шум, и в ней приводится некоторая оценка на величину Σ_{ss} . В [13] рассматривается модель в дискретном времени в топологии ориентированных графов с переменными весами. В данной работе авторы приводят необходимые и достаточные для синхронизации условия на веса рёбер графов. Работы

[16, 17] посвящены изучению синхронизации в присутствии случайного шума на ориентированных графах в непрерывном времени. Авторы демонстрируют получение оценок предельного поведения системы в результате решения некоторых матричных уравнений и из алгебраических свойств матриц системы. Алгебраические свойства ориентированных графов подробно изучены в работе [15] и других работах этого автора.

3. Основные результаты

В [8] был определён коэффициент эргодичности τ для матрицы A , соответствующей графу G из семейства, удовлетворяющего условию (d_1, \dots, d_n) :

$$\tau = \max_{\sum d_i y_i = 0} \frac{\|Ay\|_2}{\|y\|_2}.$$

Его можно рассматривать как функцию τ , сопоставляющую матрице вещественное число

$$\tau : A \rightarrow \max_{\sum d_i y_i = 0} \frac{\|Ay\|_2}{\|y\|_2}.$$

Определение 2. Рассмотрим последовательность графов $\{G(t)\}$ с элементами из семейства, удовлетворяющего условию (d_1, \dots, d_n) . Каждому графу $G(t)$ поставим в соответствие матрицу $A(t)$, как мы делали это выше, и для последовательности матриц $\{A(t)\}$ введём последовательность $\{\tau_t\}$:

$$\tau : A(t) \rightarrow \max_{\sum d_i y_i = 0} \frac{\|A(t)y\|_2}{\|y\|_2} = \tau_t.$$

По аналогии с классическим определением, τ_t также будем называть коэффициентами эргодичности.

Коэффициент τ_t напоминает l_2 -норму матрицы $A(t)$, посчитанную по ортогональному дополнению к вектору π , где

$$(3) \quad \pi = \frac{1}{\sum d_i} (d_1, \dots, d_n)^\top.$$

Поскольку семейство графов $G(t)$ устроено так, что степени вершин не меняются, для всех матриц $A(t)$ вектор π будет общим. Кроме того, он является для них левым собственным вектором.

Лемма 1. Для любого t

$$\pi^\top A(t) = \pi^\top.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} (\pi^\top A(t))_i &= \sum_j \pi_j \cdot a_{ji} = \sum_j \frac{d_j}{\sum_k d_k} \cdot a_{ij} \frac{d_i}{d_j} = \\ &= \sum_j \frac{d_i}{\sum_k d_k} \cdot a_{ij} = \pi_i \sum a_{ij} = \pi_i. \end{aligned}$$

Введём обозначения:

$$(4) \quad \begin{aligned} \nu_{max}^2 &= \max_i E w_i^2(t), \\ \tau_{max} &= \max_t \tau_t. \end{aligned}$$

Поскольку число вершин остаётся неизменным, а графов с данной конфигурацией степеней вершин конечное число, в последнем равенстве используется максимум, а не супремум. Теперь может быть сформулирована основная теорема.

Теорема 1. Если $\tau_{max} < 1$, то

$$\Sigma_{ss} \leq \nu_{max}^2 \frac{2}{1 - \tau_{max}^2}.$$

Доказательство. Из геометрических соображений

$$\begin{aligned} \|x(t) - \bar{x}(t)\mathbf{1}\|_2^2 &= \|x(t) - \frac{\langle x(t), \mathbf{1} \rangle}{\langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle} \mathbf{1}\|_2^2 \leq \\ &\leq \|x(t) - \langle x(t), \pi \rangle \mathbf{1}\|_2^2. \end{aligned}$$

Поэтому имеет место неравенство:

$$\begin{aligned} \Sigma(t) &\leq \|x(t) - \langle x(t), \pi \rangle \mathbf{1}\|_2^2, \\ \Sigma_{ss} &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sup_{\{G(t)\}} \|x(t) - \langle x(t), \pi \rangle \mathbf{1}\|_2^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned}
 & x(t+1) - \pi^\top x(t+1)\mathbf{1} = \\
 & = A(t)x(t) + w(t) - \pi^\top (A(t)x(t) + w(t))\mathbf{1} = \\
 & = A(t)x(t) + w(t) - \pi^\top x(t)\mathbf{1} - \pi^\top w(t)\mathbf{1} = \\
 & = A(t)x(t) - \pi^\top x(t)A(t)\mathbf{1} + w(t) - \pi^\top w(t)\mathbf{1} = \\
 & = A(t)x(t) - A(t)\pi^\top x(t)\mathbf{1} + w(t) - \pi^\top w(t)\mathbf{1} = \\
 & = A(t)(x(t) - \pi^\top x(t)\mathbf{1}) + w(t) - \pi^\top w(t)\mathbf{1}.
 \end{aligned}$$

Таким образом получаем равенство

$$\begin{aligned}
 & x(t+1) - \pi^\top x(t+1)\mathbf{1} = \\
 & = A(t)(x(t) - \pi^\top x(t)\mathbf{1}) + w(t) - \pi^\top w(t)\mathbf{1}.
 \end{aligned}$$

Исследуем математическое ожидание l_2 -нормы выражения, стоящего в левой части:

$$\begin{aligned}
 & E\|x(t+1) - \pi^\top x(t+1)\mathbf{1}\|_2^2 = \\
 & = E\|A(t)(x(t) - \pi^\top x(t)\mathbf{1})\|_2^2 + E\|w(t) - \pi^\top w(t)\mathbf{1}\|_2^2.
 \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что слагаемые, в которые входит $Ew(t)$, равны нулю. Обратим внимание на то, что

$$\pi \perp (x(t) - \pi^\top x(t)\mathbf{1}).$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned}
 & \|A(t)(x(t) - \pi^\top x(t)\mathbf{1})\|_2^2 \leq \tau_t^2 \|x(t) - \pi^\top x(t)\mathbf{1}\|_2^2 \leq \\
 & \leq \tau_{max}^2 \|x(t) - \pi^\top x(t)\mathbf{1}\|_2^2.
 \end{aligned}$$

Оценим слагаемое $E\|w(t) - \pi^\top w(t)\mathbf{1}\|_2^2$.

$$\begin{aligned} E\|w(t) - \pi^\top w(t)\mathbf{1}\|_2^2 &= E \sum_{j=1}^n \left(w_j(t) - \sum_{i=1}^n \pi_i w_i(t) \right)^2 = \\ &= \sum_{j=1}^n E \left[(w_j(t))^2 - 2w_j(t) \left(\sum_{i=1}^n \pi_i w_i(t) \right) + \left(\sum_{i=1}^n \pi_i w_i(t) \right)^2 \right] = \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\nu_j^2 - 2\pi_j \nu_j^2 + \sum_{i=1}^n \pi_i^2 \nu_i^2 \right] = \sum_{j=1}^n \nu_j^2 - 2\pi_j \nu_j^2 + n\pi_j^2 \nu_j^2 \leq \\ &\leq \nu_{max}^2 \sum_{j=1}^n 1 - 2\pi_j + n\pi_j^2 = \nu_{max}^2 (n - 2 + n\|\pi\|_2^2) \leq 2n\nu_{max}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого t имеет место неравенство

$$\begin{aligned} E\|x(t+1) - \pi^\top x(t+1)\mathbf{1}\|_2^2 &\leq \\ &\leq \tau_{max}^2 E\|x(t) - \pi^\top x(t)\mathbf{1}\|_2^2 + 2n\nu_{max}^2. \end{aligned}$$

Применяя предположение, что $\tau_{max} < 1$, имеем оценку

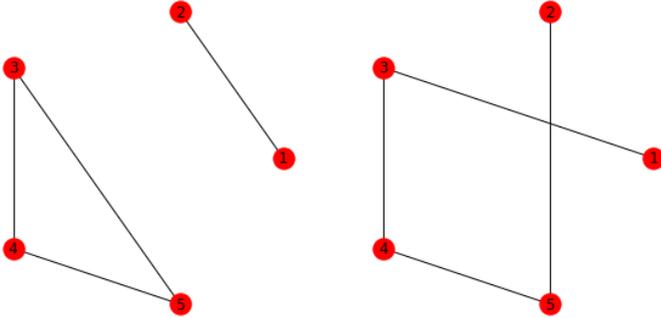
$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} E\|x(t) - \pi^\top x(t)\mathbf{1}\|_2^2 &\leq \frac{2n\nu_{max}^2}{1 - \tau_{max}^2} \\ \Sigma_{ss} &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E\|x(t) - \bar{x}(t)\mathbf{1}\|_2^2 \leq \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E\|x(t) - \pi^\top x(t)\mathbf{1}\|_2^2 \leq \frac{2\nu_{max}^2}{1 - \tau_{max}^2}. \end{aligned}$$

4. Условия, достаточные для получения оценки

Мы видим, что если неравенство $\tau(A) < 1$ выполнено для всех матриц A графов G семейства, удовлетворяющего свойству (d_1, \dots, d_n) , то удовлетворены условия приведённой выше теоремы и имеет место требуемое неравенство. Но несмотря на то,

что графы одного семейства разделяют некоторые общие свойства, спектры их матриц могут быть устроены по-разному и, как следствие, будут разные τ .

В качестве примера рассмотрим два графа H и G на пяти вершинах из семейства со свойством $(1, 1, 2, 2, 2)$:



В первую очередь заметим, что правый (граф G) связан, а левый (граф H) нет. Если в итерационном процессе (2) в качестве матриц $A(t)$ будет участвовать матрица, соответствующая графу H , то синхронизации не произойдёт, поскольку частицы будут общаться только с частицами из своей компоненты связности. Алгебраически это тоже можно подтвердить. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ — собственные значения матрицы $A^\top(t)A(t)$, тогда

$$\lambda_1 \geq \tau_t^2 \geq \lambda_2.$$

Доказательство. Согласно теореме Куранта–Фишера ([6], теорема 4.2.6) для них выполнены соотношения

$$\lambda_k = \min_{S: \dim S = n-k+1} \max_{x \in S} \frac{\langle x, A^\top(t)A(t)x \rangle}{\langle x, x \rangle}.$$

Тогда можно записать

$$\begin{aligned} \max_x \frac{\langle x, A^\top(t)A(t)x \rangle}{\langle x, x \rangle} &= \min_{S: \dim S=n} \max_{x \in S} \frac{\langle x, A^\top(t)A(t)x \rangle}{\langle x, x \rangle} \geq \\ &\geq \max_{x \perp \pi} \frac{\langle x, A^\top(t)A(t)x \rangle}{\langle x, x \rangle} \geq \min_w \max_{x \perp w} \frac{\langle x, A^\top(t)A(t)x \rangle}{\langle x, x \rangle}. \end{aligned}$$

В терминах собственных значений

$$\|A(t)\|_2^2 = \lambda_1 \geq \tau^2 \geq \lambda_2.$$

Лемма доказана.

Введённым выше графам соответствуют матрицы:

$$A_H = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

$$A_G = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Обе матрицы стохастичны, но A_H не является эргодической: у неё единица — двукратное собственное значение. Кроме того, $A_H^\top = A_H$. Поэтому, согласно последней лемме

$$1 \leq (\tau(A_H))^2 \leq 1,$$

откуда и получаем равенство $\tau(A_H) = 1$. При этом A_G эргодична и $\tau(A_G) \sim 0,7$. На основании этого примера можно заключить, что связность графа G является необходимым условием для неравенства $\tau(A_G) < 1$. Следует заметить, что она не является достаточным: в [8] приведены примеры связных графов, у которых

τ больше 1. Нам же нужно постараться уменьшить τ . В [16] в рамках похожей задачи рассматриваются приёмы по перестроению графа с целью уменьшения некоторых алгебраических показателей, влияющих на синхронизацию. Но поскольку нам важно сохранение свойства (d_1, \dots, d_n) , графы перестраивать мы не будем. Для нашей задачи было бы важным некоторым образом сузить семейство \mathcal{G} так, чтобы для всех графов из этого сужения выполнялось условие $\tau(A_G) < 1$. Помимо отыскания таких дополнительных условий для получения нужной оценки можно изучить модифицированную систему.

5. Модификация модели синхронизации многокомпонентной системы

Рассмотрим последовательность графов $\{G(t)\}$ из семейства, удовлетворяющего условию (d_1, \dots, d_n) . Каждому из них соответствует матрица $A(t)$. У этих матриц есть общий левый собственный вектор π , соответствующий собственному значению 1. Определим матрицу $F_\pi = \mathbf{1}\pi^\top$ и введём семейство матриц

$$B_\varkappa(t) = \varkappa A(t) + (1 - \varkappa)F_\pi.$$

Пусть многокомпонентная система изменяется по закону:

$$(5) \quad \begin{cases} x(t+1) = B_\varkappa(t)x(t) + w(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

где $w(t)$ — случайный шум, определённый в (1).

Взглянем чуть подробнее на матрицу $B_\varkappa(t)$, являющуюся смесью двух стохастических матриц. Её участие в итеративном процессе можно интерпретировать следующим образом: матрица F_π отвечает за обмен сигналами по некоторому полному графу, рёбрам которого приписаны некоторые веса. Действительно,

$$x(t+1) = F_\pi x(t) \Leftrightarrow x_i(t+1) = \frac{\sum_j d(j)x_j(t)}{\sum_j d(j)}.$$

То есть каждая частица транслирует всем остальным свой сигнал с интенсивностью, пропорциональной собственной степени.

Можно сказать, что в системе присутствует супервизор, который, регулируя параметр \varkappa , сообщает, насколько каждой частице придерживаться обмену по топологии $A(t)$, а насколько синхронизироваться сразу со всеми агентами системы.

Из Леммы 2 видно, как величина $\tau(A(t))$ соотносится со спектром матрицы $A(t)$. Изучим, как связаны собственные значения матриц $A(t)$ и $B_\varkappa(t)$. Рассмотрим собственные значения матрицы $A(t)$:

$$\begin{aligned}\pi^\top A(t) &= \pi^\top, \\ e_j^\top A(t) &= \lambda_j e_j^\top \quad (|\lambda_j| < 1).\end{aligned}$$

По теореме Перрона–Фробениуса([5], §2, теорема 2), поскольку матрица $A(t)$ стохастична, 1 – наибольшее по модулю собственное значение. Если же матрица $A(t)$ неприводима (что равносильно связности графа $G(t)$), то это собственное значение имеет кратность 1.

Изучим собственные вектора у матрицы B_\varkappa .

$$\begin{aligned}\pi^\top B_\varkappa(t) &= \varkappa \pi^\top + (1 - \varkappa) \pi^\top \mathbf{1} \pi^\top = \pi^\top, \\ e_j^\top B_\varkappa(t) &= \varkappa \lambda_j e_j^\top + (1 - \varkappa) e_j^\top \mathbf{1} \pi^\top.\end{aligned}$$

Покажем, что $e_j^\top \mathbf{1} = 0$.

$$e_j^\top \mathbf{1} = e_j^\top A(t) \mathbf{1} = \lambda_j e_j^\top \mathbf{1} \Rightarrow (1 - \lambda_j) e_j^\top \mathbf{1} = 0.$$

Поскольку $\lambda_j \neq 1$, $e_j^\top \mathbf{1} = 0$. Отсюда следует, что

$$e_j^\top B_\varkappa(t) = \varkappa \lambda_j e_j^\top.$$

Таким образом, при преобразовании $A(t) \rightarrow B_\varkappa(t)$ все собственные значения, кроме максимального, умножаются на \varkappa . Изучим, что произошло с величиной τ^2 для матрицы B_\varkappa .

Лемма 3.

$$\tau_{\varkappa,t} = \max_{x \perp \pi} \frac{\|B_\varkappa(t)x\|_2}{\|x\|_2} = \varkappa \max_{x \perp \pi} \frac{\|A(t)x\|_2}{\|x\|_2} = \varkappa \tau_t.$$

Доказательство. Возьмём такой вектор y , что

$$\begin{aligned} y^\top \pi &= 0, \\ y^\top y &= 1. \end{aligned}$$

Запишем

$$\begin{aligned} y^\top B_\varkappa^\top(t) B_\varkappa(t) y &= \varkappa^2 y^\top A^\top A y + \varkappa(1 - \varkappa) y^\top A^\top \mathbf{1} \pi^\top y + \\ &+ \varkappa(1 - \varkappa) y^\top \pi \mathbf{1}^\top A y + (1 - \varkappa)^2 y^\top \pi \mathbf{1}^\top \pi^\top y. \end{aligned}$$

В последних трёх слагаемых присутствуют множители $y^\top \pi$ или $\pi^\top y$, которые равны нулю. Поэтому

$$\begin{aligned} y^\top B_\varkappa(t)^\top B_\varkappa(t) y &= \varkappa^2 y^\top A^\top(t) A(t) y \\ \tau_\varkappa &= \max_{x \perp \pi} \frac{\|B_\varkappa(t)x\|_2}{\|x\|_2} = \varkappa \max_{x \perp \pi} \frac{\|A(t)x\|_2}{\|x\|_2} = \varkappa \tau. \end{aligned}$$

Доказательство леммы завершено.

Теперь можно сформулировать утверждение об оценке предельного отклонения системы (5) от положения консенсуса.

Теорема 2. *Найдётся $\varkappa \in (0, 1]$ такое, что*

$$\Sigma_{ss} \leq \nu_{max}^2 \frac{2}{1 - \varkappa^2 \tau_{max}^2},$$

где ν_{max} и τ_{max} определены в (4).

Доказательство. Согласно определению,

$$\tau_{max} = \max_t \tau_t = \max_t \max_{x \perp \pi} \frac{\|A(t)x\|_2}{\|x\|_2}.$$

Тогда, применив предыдущую лемму, получим, что

$$\max_t \max_{x \perp \pi} \frac{\|B_\varkappa(t)x\|_2}{\|x\|_2} = \varkappa \tau_{max}.$$

Очевидно, что можно подобрать значение \varkappa таким, что $\varkappa \tau_{max} < 1$. В таком случае мы получим семейство графов $\{B_\varkappa(t)\}$, у которых общий левый собственный вектор π и для которых коэффициенты эргодичности $\tau(B_\varkappa(t)) = \varkappa \tau_t < 1$ при всех t . Тогда

для описанной системы выполнена теорема 1, из которой следует неравенство

$$\Sigma_{ss} \leq \nu_{max}^2 \frac{2}{1 - \kappa^2 \tau_{max}^2},$$

которое и является требуемой оценкой. Теорема доказана.

6. Заключение

В данной статье рассматривались случайные многокомпонентные системы со специальным взаимодействием. Взаимодействие между компонентами системы основано на коммуникационных графах из некоторого класса и, кроме того, динамика компонент подвержена воздействию аддитивного случайного шума. Были изучены алгебраические свойства графов важные для согласования компонент и приведены достаточные условия, налагаемые на семейство графов коммуникаций, при которых система в пределе находится в некоторой ограниченной окрестности положения консенсуса.

Также был приведён способ несколько ослабить эти условия — введение некоторой модификации системы, в которой присутствует дополнительная связь между частицами, имитирующая влияние супервизора и позволяющая взаимодействовать агентам, не являющимся непосредственными соседями. В такой системе важно лишь соблюсти условие на графы коммуникаций: степени вершин не должны меняться с течением времени.

Литература

1. АГАЕВ Р.П. *Об области сходимости дифференциальной модели достижения консенсуса* // Управление большими системами. – 2012. – №36. – С. 81–92.
2. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Об асимптотике в моделях консенсуса* // Управление большими системами. – 2013. – №43. – С. 55–77.
3. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик (обзор базовых результатов)* // Управление большими системами. – 2010. – №30.1. – С. 470–505.
4. AMELINA N.O., FRADKOV A.L. *Approximate consensus in the dynamic stochastic network with incomplete information and measurement delays* // Automation and Remote Control. – 2012. – №73.11 – P. 1765–1783.
5. GANTMACHER F. *The Theory of Matrices*. – AMS Chelsea Publishing, 1959. – 276 p.
6. HORN R.A., JOHNSON C.R. *Matrix Analysis*. – Cambridge University Press New York, NY, USA, 2013. – 643 p.
7. JADBABAIE A., LIN J., MORSE A.S. *Coordination of Groups of Mobile Autonomous Agents Using Nearest Neighbor Rules* // IEEE Trans. and Automatic Control. – 2003. – №48.6 – P. 988–1001.
8. JADBABAIE A., OLSHEVSKY A. *Combinatorial bounds and scaling laws for noise amplification in networks* // European Control Conference – 2013 (ECC-2013). – July 17-19, 2013, Zürich, Switzerland. – P. 596–601.
9. MANITA A., MANITA L. *Distributed Time Synchronization Algorithms and Opinion Dynamics* // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – №955.1 – P. 012–038.

10. MANITA A., MANITA L. *Stochastic Time Synchronization Models Based on Agreement Algorithms* // Analytical and Computational Methods in Probability Theory. – 2017. – P. 361–375.
11. MOREAU L. *Stability of multiagent systems with time-dependent communication links* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2005. – №50.2 – P. 169–182.
12. OLFATI-SABER R., FAX J.A., MURRAY R.M. *Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems* // Proc. of the IEEE. – 2007. – №95.1 – P. 215–223.
13. SHI G., JOHANSSON K.H. *The Role of Persistent Graphs in the Agreement Seeking of Social Networks* // IEEE Journal on selected areas in communications/supplement. – 2013. – №31.9. – P. 595–606.
14. VICSEK T., CZIROK A., BEN-JACOB E., COHEN I., SHOCHET O. *Novel type of phase transition in a system of self-driven particles* // Physical Review Letters. – 1995. – №75.6 – P. 1226–1229.
15. WU C.W. *Algebraic connectivity of directed graphs* // Linear & Multilinear Algebra. – 2005. – №53.3 – P. 203–223.
16. YOUNG G.F., SCARDOVI L., LEONARD N.E. *Rearranging trees for robust consensus* // 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC). – Orlando, FL, USA, December 12-15, 2011. – P. 1000–1005.
17. YOUNG G.F., SCARDOVI L., LEONARD N.E. *Robustness of Noisy Consensus Dynamics with Directed Communication* // American Control Conference. – Marriott Waterfront, Baltimore, MD, USA – June 30-July 02, 2010. – P. 6312–6317.

CONSENSUS OF MULTICOMPONENT SYSTEM IN CHANGING TOPOLOGY WITH ADDITIVE NOISE

Sviatoslav Sheipak, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Ph.D. student (s.sheypak@gmail.com).

Abstract: The article focuses on multiagent systems with a fixed number of components. Particles synchronise in discrete moments of time according to a certain set of communication graphs. At every moment of time state of the system is described by a vector that updates iteratively. Each agent's state is determined by states of its neighbours and is influenced by additive noise component. Besides, links between particles change through time. Thus, the evolution of the system can be described as an iterative process where the state vector is multiplied by a certain stochastic matrix and added to a random vector. The aim of this paper is to analyze a value that represents a measure of how close to consensus the system is. The work suggests some restrictions on graphs that are sufficient to obtain an upper bound on that value. Besides, another modified model is presented. It allows relax conditions on graphs and still keep the value bounded.

Keywords: multiagent systems, communication graphs, consensus, synchronisation, random noise.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.

Поступила в редакцию 17.05.2018.

Дата опубликования 31.07.2018.