

НАХОЖДЕНИЕ ИСПАРЕНИЯ КАК РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Засухин С. В.¹

(Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН,
Московский физико-технический институт, Москва)

Задача нахождения испарения формулируется как задача оптимального управления, в которой управляемый процесс вертикального передвижения влаги в почве описывается одномерным нелинейным уравнением с частными производными второго порядка параболического типа. Управлением является суточное испарение, а целевой функционал есть среднеквадратическое отклонение вычисленных значений влажности почвы от некоторых предписанных значений. В результате проведения конечно-разностной аппроксимации задача редуцируется к задаче нелинейного программирования. Искать решение полученной задачи предлагается с помощью метода наискорейшего спуска. При этом градиент целевой функции вычисляется с применением точных формул быстрого автоматического дифференцирования. Предполагается, что предписанные значения совпадают с некоторым решением прямой задачи в области сравнения вычисленных значений влажности с предписанными значениями. Исследовался вопрос о том, как вид этого множества и, значит, вид данных, по которым определяется искомое испарение, влияет на точность получаемого решения и ход оптимизационного процесса. Было рассмотрено несколько вариантов такого множества. Каждое множество представляло собой совокупность узлов сетки равномерной по времени и по пространству, покрывающей всю рассматриваемую область. Анализ результатов численного решения соответствующих задач позволил из всех рассматриваемых вариантов выбрать наилучший в смысле близости полученного оптимального и истинного управлений и в смысле количества измерений влажности почвы, проводимых с целью получения данных для задачи определения испарения.

Ключевые слова: целевая функция, метод наискорейшего спуска, нелинейное параболическое уравнение, быстрое автоматическое дифференцирование.

1. Введение

Испарение с поверхности почвы входит в состав многих гидрологических и метеорологических моделей. Из всех составляющих гидрологического цикла испарение, пожалуй, является

¹ Сергей Владимирович Засухин, аспирант (s.zasukhin@yandex.ru).

наиболее трудно определяемой вследствие сложного взаимодействия между компонентами системы «почва–растительность–атмосфера». Непосредственное измерение его в естественных условиях представляет собой трудную задачу. Поэтому для определения испарения часто прибегают к расчетным методам.

Точных и универсальных методов расчета испарения в настоящее время не существует. Обычно удается оценить испарение за большие промежутки времени (недели, месяцы) и на больших территориях. Существующие расчетные методы испарения могут быть условно выделены в следующие группы.

Эмпирические методы используют формулы, получаемые на основании связи между измеренным испарением и метеорологическими факторами, которая обычно устанавливается с помощью регрессионного анализа [4, 6]. Эти формулы содержат, как правило, небольшое количество входных переменных и просты в применении. Недостаток их состоит в том, что они применимы лишь в условиях, близких к тем, в которых они были получены.

Методы водного баланса основаны на водобалансовых соотношениях поверхности земли с учетом характеристик водообмена между почвой и растительностью. С помощью этих методов вычисляется осредненная величина суммарного испарения. Среди работ, посвященных методам водного баланса, следует указать на [2, 5, 7, 15]. К недостаткам этих методов относятся их трудоемкость и невозможность определения суммарного испарения за краткосрочный период времени.

Методы теплового баланса используют уравнения теплового баланса поверхности земли с учетом тепло- и водообмена в приземном слое воздуха [5, 8, 12, 13, 14]. За рубежом широко распространен метод Пенмана–Монтейта [12, 13], в котором используются уравнения энергетического баланса на поверхности суши и уравнения переноса водяного пара и тепла между поверхностью суши и атмосферой. Модифицированная модель Пенмана–Монтейта по результатам полевой проверки в США оказалась лучшей по сравнению с 20 другими методами, основанными на регрессионном анализе.

С развитием методов и систем дистанционного зондирования Земли получают распространение **методы расчета испарения, учитывающие спутниковую информацию**. Вопросам разработки таких методов и соответствующей обработки спутниковых данных посвящены, например, работы [10, 11].

В представляемой работе продолжено исследование вопроса о нахождении испарения с поверхности почвы с применением модели вертикального переноса влаги в почве, начатое в [3]. Задача определения испарения формулируется как задача оптимального управления, в которой управляемым процессом являются моделируемые значения влажности почвы. В отличие от работы [3], где в качестве управления выступает интенсивность испарения, здесь управлением является суммарное суточное испарение. Это изменение вызвано тем, что в практической жизни гидрологи имеют дело с суточными испарением и осадками, т.е., как правило, они наблюдают и оперируют суммарными суточными значениями испарения и осадков. Целевая функция есть среднеквадратическое отклонение моделируемых значений влажности почвы от некоторых предписанных значений. Сравнение моделируемых и предписанных значений влажности происходит в некоторой области, выбор которой определяет поведение целевой функции. Ранее в [3] был исследован вопрос о том, в каких точках рассматриваемой области влажность почвы наиболее чувствительна к изменению испарения. Целью настоящей работы является выяснение вопроса о том, как вид множества, на котором происходит сравнение моделируемых и предписанных значений влажности, и, значит, вид начальных данных о влажности почвы, влияет на точность решения и на ход процесса численной оптимизации. Одной из целей такого изучения является понимание, какой вариант начальных данных обеспечит приемлемую точность решения, и при этом потребует сравнительно небольших усилий при проведении измерительных экспериментов для получения этих начальных данных. Причем эти эксперименты соответствовали бы имеющимся техническим возможностям. В качестве множеств, на которых происходит сравнение моделируемых значений влажности почвы с предписанными значениями, рассматривались множества, со-

стоящие из узлов сетки, покрывающей всю рассматриваемую область. Шаги сетки по пространству и по времени менялись от одного множества к другому. То есть эти множества представляли всю рассматриваемую область с разной степенью подробности. Этот вопрос детально освящается в разделе 5.

2. Постановка задачи

Предположим, что почва представляет собой изотермическую недеформируемую однородную пористую среду. При соблюдении этих предположений вертикальное передвижение влаги в почве хорошо описывается одномерным нелинейным уравнением параболического типа, которое приводится ниже. Это уравнение выводится на основе закона Дарси, утверждающего, что поток влаги через единичную поверхность пропорционален градиенту потенциала всех действующих в почве сил, и уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости, являющегося выражением закона сохранения массы. Коэффициент между величиной потока влаги в ненасыщенной почве и градиентом потенциала называется гидравлической проводимостью, а в условиях насыщения почвы влагой – коэффициентом фильтрации. Полный потенциал складывается из капиллярно-сорбционного или влажностного потенциала почвы и гравитационного потенциала. Физический смысл уравнения состоит в том, что движение влаги в почве складывается из диффузии почвенной влаги и движения под действием гравитационных сил.

Далее нас будет интересовать процесс движения влаги в ненасыщенной почве. Рассмотрим следующую начальнокреговую задачу:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \theta(z, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(D(\theta(z, t)) \frac{\partial \theta(z, t)}{\partial z} - K(\theta(z, t)) \right), & (z, t) \in Q, \\
 \theta(z, 0) &= \varphi(z), & z \in (0, L), \\
 \theta(L, t) &= \psi(t), & t \in (0, T), \\
 - \left(D(\theta(z, t)) \frac{\partial \theta(z, t)}{\partial z} - K(\theta(z, t)) \right) \Big|_{z=0} &= R(t) - E(t), & t \in (0, T), \\
 \theta_{\min} \leq \theta(0, t) \leq \theta_{\max}, & & t \in (0, T),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где z – пространственная переменная, причем ось z направлена сверху-вниз; t – время; $\theta(z, t)$ – искомая влажность в точке (z, t) , так называемая «объемная» влажность почвы, выражаемая в единицах объема воды в единичном объеме почвы (безразмерная величина); $Q = (0, L) \times (0, T)$; $\varphi(z)$ и $\psi(t)$ – заданные функции; $D(\theta)$ и $K(\theta)$ – коэффициент диффузии и гидравлическая проводимость – гидрофизические характеристики почвы; $\theta_{\min} = \theta_r + \varepsilon$, $\theta_{\max} = \theta_s - \varepsilon$, где θ_r и θ_s – остаточная влажность и влажность насыщения соответственно, зависящие от типа почвы, ε – некоторая постоянная, такая, что $0 < \varepsilon \ll \theta_r$; $R(t)$ и $E(t)$ – интенсивности осадков и испарения – линейные потоки влаги; $0 \leq E(t) \leq M$, $t \in (0, T)$, M – некоторая константа, $M > 0$.

Функция $\varphi(z)$ задает влажность почвы во всех точках рассматриваемого интервала $(0, L)$ в начальный момент времени $t = 0$. Функция $\psi(t)$, $t \in (0, T)$, определяет нижнее граничное условие и задает значения влажности почвы на глубине $z = L$. Приведенное в (1) верхнее (при $z = 0$) краевое условие означает, что поверхностный сток отсутствует, и поток влаги в почве при $z = 0$ равен суммарному входящему потоку влаги на границе атмосфера-почва.

Коэффициент диффузии и гидравлическая проводимость вычисляются по широко применяемым формулам ван Генухтена [16]:

$$\begin{aligned}
 K(\theta) &= K_0 S^{0.5} \left[1 - \left(1 - S^{1/m} \right)^m \right]^2, \\
 D(\theta) &= K_0 \frac{1 - m}{\alpha m (\theta_s - \theta_r)} S^{0.5 - 1/m} \times \left[\left(1 - S^{1/m} \right)^{-m} + \left(1 - S^{1/m} \right)^m - 2 \right],
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

где $S = (\theta - \theta_r)/(\theta_s - \theta_r)$; $K_0, \alpha, m, \theta_r, \theta_s$ – некоторые параметры.

Разделим интервал $(0, T)$ на q равных подынтервалов, $q > 1$, с концевыми точками $t_n, 0 \leq n \leq q$. Введем множество $U = \{u : u \in R^q, 0 \leq u^n \leq M, n = 1, \dots, q\}$. Каждому $u \in U$ поставим в соответствие $E(u, t)$ таким образом, что $E(u, t) = u^n, t \in (t_{n-1}, t_n), n = 1, \dots, q$. Будем рассматривать U в качестве множества допустимых управлений, а под функциями $E(t)$ из (1) будем понимать функции $E(u, t), u \in U$.

Назовем описанную задачу (1)–(2) прямой задачей.

Зададимся целью найти испарение $E(u, t), u \in U$, из описанного выше класса кусочно-постоянных функций по некоторой наблюдаемой в области $Q_0 \subseteq Q$ функции влажности, назовем ее $\Theta(z, t)$, найти в том смысле, чтобы решение $\theta(z, t)$ прямой задачи (1)–(2) при определяемом испарении было бы как можно ближе к наблюдаемой функции влажности $\Theta(z, t)$ в области Q_0 . В качестве оценки такой близости выберем интегральную норму отклонения решения $\theta(z, t)$ прямой задачи (1)–(2) от наблюдаемой (или предписанной) функции влажности $\Theta(z, t)$ в области Q_0 .

Сформулируем задачу нахождения испарения $E(u, t), u \in U$, как следующую задачу оптимального управления.

Задача 1. Пусть на некотором множестве $Q_0 \subseteq Q$ задана функция $\Theta(z, t)$. Найти управление $u^{opt} \in U$, при котором соответствующее решение $\theta^{opt}(t)$ прямой задачи (1)–(2) при $E(u^{opt}, t)$ приводит к минимуму функционала:

$$J = \frac{1}{2} \int_{Q_0} (\theta - \Theta)^2 dz dt .$$

3. Дискретный аналог задачи оптимального управления

Разобьем интервалы $(0, T)$ и $(0, L)$ на N и I равных подынтервалов с концевыми точками $t^n = \tau n, 0 \leq n \leq N$ и $z_i = hi, 0 \leq i \leq I$ соответственно, где $\tau = T/N$ и $h = L/I$. Пусть $N/q = \gamma$ – целое число. Аппроксимируем прямую задачу (1)–(2) с помощью следующей конечно-разностной схемы:

$$\frac{\theta_i^n - \theta_i^{n-1}}{\tau} = \frac{1}{h} \left(D_{i+1/2}^n \frac{\theta_{i+1}^n - \theta_i^n}{h} - K_{i+1/2}^n - D_{i-1/2}^n \frac{\theta_i^n - \theta_{i-1}^n}{h} + K_{i-1/2}^n \right),$$

$$1 \leq i < I, \quad 0 < n \leq N,$$

$$\theta_i^0 = \varphi_i, \quad 0 \leq i \leq I, \quad \theta_i^n = \psi^n, \quad 1 \leq n \leq N,$$

где

$$\theta_i^n = \theta(z_i, t^n), \quad D_{i+1/2}^n = D(\theta((i+1/2)h, t^n)), \quad K_{i-1/2}^n = K(\theta((i-1/2)h, t^n)),$$

а φ_i и ψ^n – значения функций $\varphi(z)$ и $\psi(t)$ в точках z_i и t^n соответственно. Конечно-разностная аппроксимация левого краевого условия выглядит следующим образом:

$$\frac{\theta_0^{n+1} - \theta_0^n}{\tau} = \frac{2}{h} \left(D_{1/2}^{n+1} \frac{\theta_1^{n+1} - \theta_0^{n+1}}{h} - K_{1/2}^{n+1} + R^{n+1} - E^{n+1} \right), \quad 0 \leq n < N,$$

где R^{n+1} , E^{n+1} – значения функций $R(t)$ и $E(u, t)$ в точке $t^{n+1} = \tau(n+1)$. В результате приходим к следующему конечно-разностному аналогу прямой задачи (1)–(2):

$$\Phi_0^n = - \left(\frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} D_{1/2}^n \right) \theta_0^n + \frac{2}{h^2} D_{1/2}^n \theta_1^n + \frac{1}{\tau} \theta_0^{n-1} + \frac{2}{h} (-K_{1/2}^n + R^n - E^n) = 0,$$

$$\theta_{\min} \leq \theta_0^n \leq \theta_{\max}, \quad 1 \leq n \leq N,$$

$$(3) \quad \Phi_i^n = \frac{1}{h^2} D_{i-1/2}^n \theta_{i-1}^n - \left[\frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2} (D_{i+1/2}^n + D_{i-1/2}^n) \right] \theta_i^n + \frac{1}{h^2} D_{i+1/2}^n \theta_{i+1}^n + \left[\frac{\theta_i^{n-1}}{\tau} + \frac{1}{h} (K_{i-1/2}^n - K_{i+1/2}^n) \right] = 0, \quad 1 \leq i < I, \quad 1 \leq n \leq N,$$

$$\Phi_i^n = \psi^n - \theta_i^n = 0, \quad 1 \leq n \leq N,$$

$$\theta_i^0 = \varphi_i, \quad 0 \leq i \leq I,$$

где $E = E(u) = [E^1, \dots, E^N]$, $E^n = E(u, t^n)$, $n = 1, \dots, N$, $u \in U$. При этом коэффициент диффузии D и гидравлическую проводимость K в промежуточных точках будем вычислять по следующим формулам:

$$(4) \quad D_{i+1/2}^n = 2 \frac{D_i^n D_{i+1}^n}{D_i^n + D_{i+1}^n}, \quad K_{i+1/2}^n = 2 \frac{K_i^n K_{i+1}^n}{K_i^n + K_{i+1}^n}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad 0 \leq i < I.$$

Введем в рассмотрение множества $A_0 = \{0, 1, \dots, I\}$ и $B_0 = \{1, \dots, N\}$. Пусть $Q_0 = \{(z, t) : z = ih, t = lt, (i, l) \in C\}$, где C –

некоторое множество, такое что $C \subseteq A_0 \times B_0$. Определим целевую функцию в виде:

$$(5) \quad W(\theta(u), u) = \frac{1}{2} \sum_{(j, n) \in C} (\theta_j^n - \Theta_j^n)^2 h \tau,$$

где $\theta(u)$ – решение системы (3)–(4) при $E(u)$, $u \in U$, Θ_j^n – значение функции $\Theta(z, t)$ в точке (z_j, t^n) .

Сформулируем дискретную задачу оптимального управления.

Задача 2. Найти оптимальное управление $u^{opt} \in U$ и соответствующее этому управлению решение θ^{opt} системы (3)–(4), при которых функционал $W(\theta(u), u)$ достигал бы минимального значения.

4. Решение дискретной задачи оптимального управления

В результате дискретизации задача оптимального управления, как видим, сводится к задаче нелинейного программирования. Решать численно эту конечномерную задачу оптимизации предлагается методом наискорейшего спуска. Градиент целевой функции (5) при этом вычисляется с применением метода быстрого автоматического дифференцирования (БАД) [1, 9]. Согласно БАД, градиент функции $W(\theta(u), u)$ (5) вычисляется по формуле

$$(6) \quad dW(\theta(u), u)/du = W_u(\theta(u), u) + \Phi_u^T(\theta(u), u)p.$$

Входящий в эту формулу вектор $p \in R^n$ — множитель Лагранжа, который определяется в результате решения следующей линейной относительно p системы уравнений:

$$(7) \quad W_\theta(\theta(u), u) + \Phi_\theta^T(\theta(u), u)p = 0_q,$$

где

$$\Phi^T = [\Phi_0^1, \Phi_1^1, \dots, \Phi_l^1, \dots, \Phi_0^N, \Phi_1^N, \dots, \Phi_l^N], \quad q = (I+1)N,$$

$$\theta^T = [\theta_0^1, \theta_1^1, \dots, \theta_l^1, \dots, \theta_0^N, \theta_1^N, \dots, \theta_l^N], \quad u \in U.$$

Система уравнений (7) является сопряженной к системе (3). В [3] было показано, что процедура вычисления градиента по формулам (6)–(7) является устойчивой.

5. Численные результаты

Описанная конечномерная задача решалась при следующих значениях входных параметров:

$$L = 90 \text{ см}, \quad T = 61 \text{ сут}, \quad \varepsilon = 1 \cdot 10^{-10}, \quad \varphi(z) = 0.3, \quad z \in (0, L),$$

$$K_0 = 103.68 \text{ см/сут}, \quad \alpha = 0.075 \text{ см}^{-1}, \quad m = 0.471,$$

$$\theta_r = 0.065 \text{ см}^3/\text{см}^3, \quad \theta_s = 0.51 \text{ см}^3/\text{см}^3, \quad M = 2 \text{ см/сут}.$$

Так как на практике наблюдаются, как правило, суммарные за сутки значения осадков и испарения, было принято допущение о том, что интенсивности испарения и осадков в течение суток сохраняют постоянные значения. Управление представляет собой вектор из 61 компоненты, каждая из которых есть суточный слой испарения, и численно равна интенсивности испарения в течение соответствующих суток. Шаг по времени составил 1/100 сут, а шаг по пространству – 1 см. Таким образом, $N = 6100$, $q = 61$ и $I = 90$ в нашем случае.

График зависимости влажности почвы при $z = 90$ от времени (функции $\psi(t)$) представлен на рис. 1.

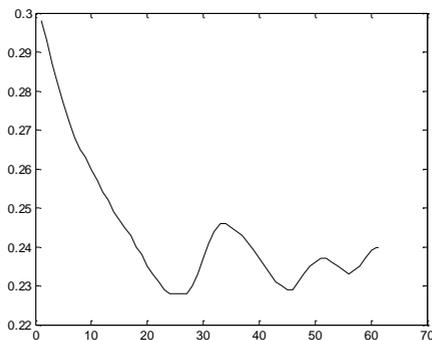


Рис. 1. Зависимость влажности почвы при $z = 90$ от времени

График зависимости слоя выпавших за сутки осадков от времени показан на рис. 2.

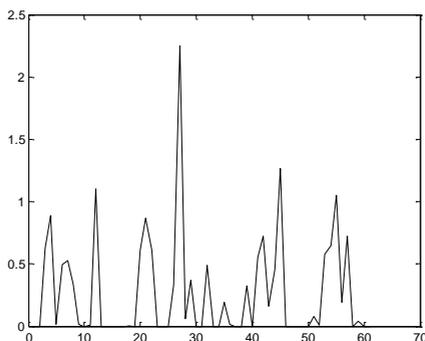


Рис. 2. Зависимость суточного слоя выпавших осадков в сантиметрах от времени

Численные расчеты проводились в несколько этапов.

5.1. ПЕРВЫЙ ЭТАП

На этом этапе было выбрано некое управление, назовем его $u^{true} = [u_1^{true}, \dots, u_{61}^{true}]^T$, $u^{true} \in U$. Далее решалась прямая конечно-разностная задача (3) с выбранным $E(u^{true})$. Понятно, что система (3) допускает расщепление на N подсистем, каждая из которых относится к n -му, $n = 1, \dots, N$, временному слою и содержит в качестве неизвестных значения влажности только на этом временном слое. Двигаясь в направлении от первого временного слоя к N -му временному слою, мы последовательно для каждого временного слоя решаем соответствующую систему уравнений отдельно от других. Решение каждой такой системы находится в результате выполнения следующего итерационного процесса. На каждой итерации решается соответствующая система, в которой значения коэффициента диффузии и гидравлической проводимости вычисляются по формулам (2), (4) с использованием значений влажности, полученных на предыдущей итерации. При известных коэффициентах система является линейной, при этом основная матрица системы – трехдиагональная. Система

решается методом прогонки. На первой итерации значения коэффициента диффузии и гидравлической проводимости вычисляются с применением значений влажности на предыдущем временном слое. Этот итерационный процесс продолжался до тех пор, пока евклидово расстояние между решениями, полученным на соседних итерациях, не станет менее 10^{-4} . При выбранных параметрах задачи для нахождения решения требовалось, как правило, не более пяти итераций. Полученное решение задачи (3) было названо «экспериментальными данными» и обозначено $\Theta(z, t)$, $(z, t) \in Q$.

5.2. ВТОРОЙ ЭТАП

На втором этапе решалась задача 2 с различными целевыми функциями. Целевые функции вычислялись по формуле (5), в которой множество C имело вид:

$$(8) \quad \begin{aligned} C &= A \times B, \quad A = \{i : i = i_0 k, k = 0, 1, \dots, [I/i_0]\}, \\ B &= \{n : n = n_0 l, l = 1, \dots, [N/n_0]\}. \end{aligned}$$

Рассматривались все сочетания n_0 и i_0 , когда $i_0 = 1, 5, 10$, $n_0 = 1, 5, 10, 20, 50, 100$. Численная оптимизация проводилась методом наискорейшего спуска, градиент целевой функции вычислялся по формулам БАД (6)–(7). Величина шага вдоль выбранного направления определялась в результате проведения одномерной оптимизации функции, интерполирующей целевую функцию вдоль указанного направления с помощью сплайнов, построенных по 40 точкам. Итерационный процесс продолжался до тех пор, пока чебышевская норма градиента целевой функции не становилась меньше 10^{-14} . В качестве начального управления было выбрано u^{init} , $u_n^{init} = 0,3$, $n = 1, \dots, 61$. Задача численной оптимизации на всем промежутке времени допускает декомпозицию на совокупность отдельных задач оптимизации в соответствии с выбранным разбиением всего временного промежутка. С учетом вида управления рассматривалось множество из 61 задачи, каждая из которых соответствует временному интервалу в одни сутки.

Результаты численных расчетов приведены в таблице 1.

Как показали численные расчеты, для каждой задачи требовалось приблизительно от 250 до 330 итераций для нахождения решения. Как правило, это число было равно 300 или очень незначительно отличалось от 300. В задаче, соответствующей 13-м суткам, количество итераций, приводящих к решению, было равно 23-26. Это объясняется тем, что начальное приближение $u_{13}^{init} = 0,3$ и истинное управление $u_{13}^{true} = 0,2777$ оказались близки друг другу. В некоторых задачах итерационный процесс не приводил к решению и за 500 итераций. Эта ситуация возникла при $n_0 = 50, 100$. Тогда приходилось искать приемлемое начальное приближение. Количество таких осложненных дней (в случае их возникновения) изменялось от 2 до 15. В частности, таких дней оказалось 15 в случае $n_0 = 50, i_0 = 1$, а именно: это были сутки с порядковыми номерами 11, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 25, 37, 38, 40, 49, 50, 52 и 61, и 2 дня в случае $n_0 = 50, i_0 = 10$ (сутки с порядковыми номерами 18, 19).

Таблица 1. Результаты второго этапа

n_0	i_0	Отклонение	Итерации	Осложненные дни
1	1	0	290-300	0
	5	$1,00 \cdot 10^{-12}$	290-300	0
	10	$1,00 \cdot 10^{-12}$	290-300	0
5	1	$1,00 \cdot 10^{-12}$	290-300	0
	5	$2,00 \cdot 10^{-12}$	290-301	0
	10	$2,00 \cdot 10^{-12}$	290-302	0
10	1	$1,00 \cdot 10^{-12}$	290-300	0
	5	$1,30 \cdot 10^{-11}$	290-302	0
	10	$1,00 \cdot 10^{-12}$	290-304	0
20	1	$3,00 \cdot 10^{-12}$	290-303	0
	5	$1,81 \cdot 10^{-11}$	300-306	0
	10	$2,23 \cdot 10^{-11}$	300-309	0
50	1	$1,84 \cdot 10^{-11}$	290-307	15
	5	$3,10 \cdot 10^{-11}$	300-309	2
	10	$7,00 \cdot 10^{-12}$	300-319	2
100	1	$4,00 \cdot 10^{-12}$	290-302	15
	5	$6,90 \cdot 10^{-11}$	300-314	14
	10	$1,80 \cdot 10^{-11}$	300-328	8

Проведенные расчеты показали, что во всех рассматриваемых случаях максимальное отклонение найденного оптимального управления от истинного управления, как правило, возрастало с увеличением n_0 . При этом во всех случаях оно оказалось незначительным, а именно:

$$\left| u_n^{true} - u_n^{opt} \right| \leq 6,09 \cdot 10^{-11}, \quad n = 1, \dots, 61. .$$

Графики начального, истинного и найденного в результате численных расчетов оптимального управлений для случаев $n_0 = 100$, $i_0 = 1$ и $n_0 = 10$, $i_0 = 10$ представлены на рис. 3 и рис. 4 соответственно. На этих рисунках начальное управление обозначено толстой сплошной линией, истинное управление — сплошной линией, а оптимальное управление отмечено окружностями. Видно, что графики истинного и оптимального управлений в обоих случаях практически совпадают.

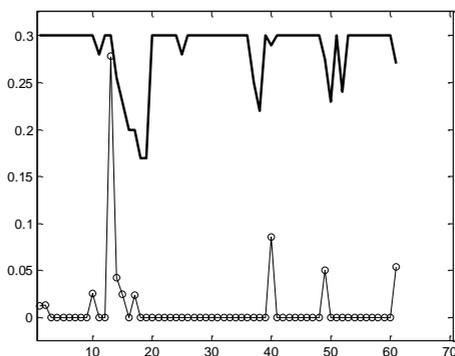


Рис. 3. Графики истинного, начального и оптимального управлений в случае $n_0 = 100$, $i_0 = 1$

Описанная схема проведения численных расчетов может применяться для оценивания того, как использование того или иного набора начальных данных, определяющего множество Q_0 , повлияет на близость получаемого оптимального управления к его истинному значению и на процесс численной оптимизации. И, значит, еще на стадии планирования экспериментов по изме-

рению влажности почвы эти численные результаты могут быть использованы для выбора оптимального плана экспериментов по измерению влажности почвы.

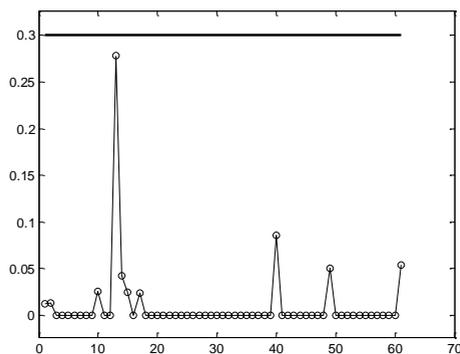


Рис. 4. Графики истинного, начального и оптимального управлений в случае $n_0 = 10$, $i_0 = 10$

Поясним сказанное на следующем примере. Предположим, нам известно, что искомое испарение близко к рассмотренному ранее испарению $E^{true}(t)$. Рассмотрим несколько вариантов проведения измерительных экспериментов, когда измерения влажности почвы производятся 100, 20, 10, 5, 2 и 1 раз в сутки через равные промежутки времени и с шагом по глубине в 1, 5 и 10 см. Полученные при проведении таких экспериментов данные могут быть использованы при решении задачи оптимального управления с целевой функцией, вычисляемой по формулам (5), (8), где $n_0 = 1, 5, 10, 20, 50, 100$ и $i_0 = 1, 5, 10$. Зададимся вопросом, какой вариант следует выбрать, руководствуясь естественным стремлением минимизировать затраты на проведение такого эксперимента, но при этом обеспечить достаточную близость к искомому испарению численного решения соответствующей дискретной задачи оптимального управления. Кроме того, желательно было бы также понять, будет ли процесс оптимизации при поиске численного решения задачи оптимального управления проходить без осложнений. Проведя численные расчеты по описанной выше схеме и проанализировав их ре-

зультаты, мы можем выбрать подходящий вариант проведения измерений.

Так, анализ полученных выше численных результатов позволяет сказать, что таким вариантом является измерение влажности почвы через равные интервалы времени 5 раз в сутки с шагом по глубине в 10 см, так как численное решение будет очень незначительно отличаться от истинного испарения, оптимизация будет проходить без осложнений и, кроме того, при этом количество измерений будет минимальным.

6. Заключение

Анализ полученных результатов показывает, что в случае, когда начальные данные совпадают с решением задачи (3)–(4) в соответствующих точках, можно сделать следующие выводы.

- Применение предлагаемого подхода позволяет восстанавливать испарение с поверхности почвы с хорошей точностью.
- Результаты численных экспериментов, проведенных по подобному описанному выше сценарию, позволяют оценить, как вид множества, в котором сравниваются моделируемые и предписанные значения влажности (а значит, и вид используемых в задаче экспериментальных данных), повлияет на близость соответствующего численного решения к истинному значению испарения, а также понять, насколько неосложненным окажется процесс численной оптимизации.

Литература

1. АЙДА-ЗАДЕ К. Р., ЕВТУШЕНКО Ю.Г. *Быстрое автоматическое дифференцирование на ЭВМ* // Математическое моделирование. – 1989. – Т. 1. – С. 121–139.
2. АЛПАТБЕВ А.М. *К Влагообороты в природе и их преобразования.* – Л.: Гидрометеиздат, 1969. – 322 с.
3. ДИКУСАР В.В., ЗАСУХИН С.В. *Применение быстрого автоматического дифференцирования при нахождении испарения с поверхности почвы* // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки. – 2016. – Vol. 69, №6. – С. 42–55.
4. ИВАНОВ Н.Н. *Об определении величин испаряемости* // Изв. ВГО. – 1954. – Т. 86, №2. – С. 189–196.
5. КОНСТАНТИНОВ А.Р. *Нормирование орошения: методы, их оценка, пути уточнения* // Гидротехника и мелиорация. – 1986. – №1. – С. 19–28.
6. ЛЬГОВ Г.К. *Орошаемое земледелие.* – М.: Колос, 1979. – 191 с.
7. ЧЕРЕМИСИНОВ А.Ю., ЖЕРДЕВ В.Н., ЧЕРЕМИСИНОВ А.А. *Динамика климата, водных балансов и ресурсов Центрального Черноземья.* – Воронеж: Воронежский ГАУ, 2013. – 326 с.
8. ALLEN R.G., PRUITT W.O., BUSINGER J.A., FRITSCHEN L. J., JENSEN M.E., QUINN F.H. *Evaporation and Transpiration* : ASCE Handbook of Hydrology. – N.Y.: ASCE, 1996. – P. 125–252.
9. GRIEWANK A. *Evaluating derivatives.* – Philadelphia: SIAM, 2000.
10. MARTENS B., MIRALLES D., LIEVENS H., FERNANDEZ-PRIETO D., VERHOEST N. *Improving terrestrial evaporation estimates over continental Australia through assimilation of SMOS soil moisture* // Intern. J. Applied Earth Observation and Geoinformation – Special Issue: “Advances in the Validation and Application of Remotely Sensed Soil Moisture”. Part 2. – 2016. – Vol. 48. – P. 146–162.

11. MIRALLES D.G., HOLMES T.R.H., DE JEU R.A.M., GASH J.H., MEESTERS A.G.C.A., DOLMAN A.J. *Global land-surface evaporation estimated from satellite-based observations* // Hydrol. Earth Syst. Sci. – 2011. – Vol. 15. – P. 453–469.
12. MONTEITH J. *Evaporation and the environment* // 19th Symposium of the Society of Experimental Biology roc. Royal Society. – Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1965. – P. 205–234.
13. PENMAN H.L. *Natural evaporation from open water, bare soil and grass* // Proc. Royal Society. – 1948. – Vol. 193. – P. 120–145.
14. PRIESTLEY C.M.B., TAYLOR R.J. *On the assessment of surface heat flux and evaporation using large-scale parameters* // Monthly Weather Review. – 1972. – Vol. 100, №2. – P. 81–92.
15. SAVENIJE H.H.G. *Determination of evaporation from a catchment water balance at a monthly time scale* // Hydrology and Earth System Sciences. – 1997. – Vol. 1, №1. – P. 93–100.
16. VAN GENUCHTEN M.TH. *A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils* // Soil. Sci. Soc. Am. J. – 1980. – Vol. 44. – P. 892–898.

DETERMINING EVAPORATION AS A SOLUTION OF THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM

Sergey Zasukhin, Dorodnicyn Computing Centre of RAS, Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, post-graduate student (s.zasukhin@yandex.ru).

Abstract: The problem of determining evaporation is stated as an optimal control problem. The controlled process of vertical water transfer in soil is described by one-dimensional nonlinear parabolic equation. The daily evaporation is a control and, the objective function is the mean-square deviation of calculated values of the soil moisture from some prescribed values. As a result of finite difference approximation, the optimal control problem is reduced to a nonlinear programming problem. The problem obtained is proposed to be solved by the steepest descent method. The objective function gradient is computed using exact formulas of fast automatic differentiation. It is assumed that the prescribed values coincide with some solution of the direct problem on the set of comparisons of the calculated values and prescribed values of soil moisture. How does the type of this set affect the accuracy of the solution? Several variants of such a set are considered. The analysis of numerical solutions of the corresponding problems allows to choose the optimal variant in the sense of the accuracy of the solution and the number of measurements of the required soil moisture data.

Keywords: objective function, steepest descent method, nonlinear parabolic equation, fast automatic differentiation.

УДК 519.6 + 519.85
ББК 22.19 + 22.18

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Э.Ю. Калимулиной.*

*Поступила в редакцию 26.09.2017.
Опубликована 30.09.2018.*