О ЗАКОНЕ СТАЦИОНАРНОЙ ОЧЕРЕДИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГРУППОВЫМ ПОСТУПЛЕНИЕМ ТРЕБОВАНИЙ[1]

Соболев В. Н.[2]
(*Москва*)

Рассматривается однолинейная система массового обслуживания с групповым поступлением требований, в которой моменты поступления групп требований образуют процесс восстановления, длительности обслуживания имеют показательное распределение, число заявок в группе ограничено, а число мест ожидания неограничено. Для данной системы массового обслуживания найдены условия выполнения основного закона стационарной очереди Хинчина. Показано, что в случае выполнения основного закона стационарной очереди Хинчина для описанной выше системы массового обслуживания стационарные вероятности числа заявок в системе по времени имеют один и тот же вид при любом входящем потоке, и совпадают с соответствующими вероятностями однолинейной системы массового обслуживания с групповым поступлением требований, в которой моменты поступления групп требований образуют простейший входной поток, длительности обслуживания имеют показательное распределение, число мест ожидания неограничено. Доказано одно новое представление для производящей функции стационарных вероятностей числа заявок в системе по времени. Для этого вводится производящая функция «хвостов» распределения числа требований во входящей группе заявок и производящая функция стационарных вероятностей числа заявок в системе по времени вложенной однородной цепи Маркова.

Ключевые слова: система массового обслуживания, групповое поступление, стационарное распределение, производящая функция вероятностей, вложенная цепь Маркова, процесс восстановления, основной закон стационарной очереди Хинчина.

1. Введение

В сборнике «Аналитические и вычислительные методы в теории вероятностей и её приложениях (АВМТВ-2017)» [3, с. 171–175] была опубликована статья А.Д. Соловьёва и В.Н. Со-

---

[1] *Автор пользуется случаем и благодарит В.В. Козлова за постоянное внимание к его работе, плодотворное обсуждение и редакционные замечания.*

[2] *Виталий Николаевич Соболев, к.ф.-м.н., свободный исследователь* (*sobolev_vn@mail.ru*).

болева «Одна система массового обслуживания с групповым поступлением требований», в которой рассматривалась система $GI^{\nu}|M_{\mu}|1|\infty$.

В системе массового обслуживания $GI^{\nu}|M_{\mu}|1|\infty$ моменты поступления групп требований $t_0 = 0$, $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < ...$ образуют процесс восстановления [2] с функцией распределения $\mathsf{P}\{X_n < t\} = F(t)$, где $X_n = t_n - t_{n-1}$, $n \geqslant 1$.

В каждый момент t_n поступает группа из ν_n требований, причем величины ν_n независимы, одинаково распределены и ограничены.

В системе имеется один обслуживающий прибор, время обслуживания распределено по показательному закону с параметром μ, а число мест для ожидания неограниченно.

Пусть $\xi(t)$ – число требований в системе в момент t. В рамках данной системы в [3, с. 171–175] было найдено стационарное распределение процесса

$$\mathsf{P}(z) = \lim_{t\to\infty} M z^{\xi(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n,$$

в котором искомое распределение определялось через стационарное распределение вложенной однородной цепи Маркова

$$\xi_n = \xi(t_n - 0),\ n = 1, 2, ...,\ \xi_0 = 0$$

с производящей функцией

$$\pi(z) = \lim_{t\to\infty} M z^{\xi_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k.$$

В данной работе исследуются условия, при выполнении которых в модели $GI^{\nu}|M_{\mu}|1|\infty$ выполнен *основной закон стационарной очереди Хинчина* [4, с. 76], т.е. для любого неотрицательного k выполняются соотношения

$$p_k = \pi_k.$$

Данные соотношения эквивалентны совпадению производящих функции распределений $P(z) = \pi(z)$.

В статье доказано, что для системы $M_\lambda^\nu|M_\mu|1|\infty$ выполняется основной закон стационарной очереди Хинчина; а если данный закон выполняется для произвольной модели $GI^\nu|M_\mu|1|\infty$, то в последней стационарные вероятности p_k и π_k совпадают с соответствующими вероятностями системы $M_\lambda^\nu|M_\mu|1|\infty$.

Также в статье найдено одно новое представление для производящей функции стационарных вероятностей $P(z)$, имеющее простой вероятностный смысл.

2. Предварительные сведения и обозначения

2.1. ВХОДЯЩИЙ ПОТОК

Как было указано выше, в модели $GI^\nu|M_\mu|1|\infty$ длины интервалов между поступлениями групп требований $X_n = t_n - t_{n-1}$, которые представляют собой время между приходами двух соседних групп требований, независимы и одинаково распределены с функцией распределения $F(x)$.

Определим T как среднее время между поступлениями групп заявок в систему:

$$T = \mathsf{M}X_n = \int_0^\infty x dF(x).$$

В частности, для модели $M_\lambda^\nu|M_\mu|1|\infty$ имеем $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ и среднее время между поступлениями групп заявок в систему опреляется через параметр распределения по следующей формуле:

$$T = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

2.2. ВХОДЯЩАЯ ГРУППА ТРЕБОВАНИЙ

В каждый момент времени t_n поступает группа требований из ν_n независимых, одинаково распределённых требований с производящей функцией

$$\alpha(z) = \mathsf{M}z^{\nu_n} = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + ... + \alpha_m z^m,\ \alpha_m \neq 0,$$

где $\alpha_k = \mathsf{P}\left\{\nu_n = k\right\},\ k = 1, 2, ..., m$. Величины ν_n независимы в совокупности от величин X_n.

С помощью производящей функции $\alpha(z)$ легко находится среднее число заявок в группе:

$$\nu = \mathsf{M}\nu_n = \alpha'(z)\big|_{z=1} = \sum_{k=1}^{m} k\alpha_k.$$

2.3. ПРИБОР

Пусть случайная величина Y_n обозначает время обслуживания n-й заявки. Величины Y_n независимы друг от друга и от величин X_n. По условию задачи величины Y_n имеют одинаковое распределение с функцией распределения $G(t) = 1 - e^{-\mu t}$.

В этом случае среднее время обслуживания n-й заявки τ конечно и равно

$$\tau = \mathsf{M}Y_n = \int_0^\infty x dG(x) = \int_0^\infty x\mu e^{-\mu x} dx,$$

где $\mu = 1/\tau$ – интенсивность обслуживания.

2.4. ОБСЛУЖИВАНИЕ

Пусть η_n – это число точек пуассоновского потока с параметром μ, приходящих на интервале (t_n, t_{n+1}). Поскольку в системе имеется один обслуживающий прибор, а время обслуживания распределено по показательному закону с параметром μ, то величину η_n можно интерпретировать как количество заявок обслуженных за время $X_{n+1} = t_{n+1} - t_n$.

Определим случайные величины $S_n = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$ и величину

$$\mu\left(t\right) = \max\left\{n \geqslant 0 \mid S_n \leqslant t\right\}.$$

Тогда $\eta_n = \mu\left(X_{n+1}\right)$ и

$$\mathsf{P}\left\{\mu\left(t\right) = n\right\} = \frac{\left(\mu t\right)^n}{n!} e^{-\mu t}.$$

Неотрицательные целочисленные случайные величины η_n независимы и поэтому можно вычислить для каждой из них производящую функцию

$$\omega(z) = \mathsf{M} z^{\eta_n} = \sum_{s=0}^{\infty} \omega_s z^s = \sum_{s=0}^{\infty} z^s \int_0^\infty \frac{(\mu x)^s}{s!} e^{-\mu x} dF(x) =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\mu x(1-z)} dF(x) = \varphi(\mu - \mu z),$$

где через $\varphi(z)$ обозначено преобразование Лапласа–Стильтьеса функции распределения $F(x)$:

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-zx} dF(x),\ z \geqslant 0,$$

а через

$$\omega_s = \int_0^\infty \frac{(\mu x)^s}{s!} e^{-\mu x} dF(x),\ s \geqslant 0,$$

– вероятности события $\{\eta_n = s\}$, т.е. ω_s – вероятности того, что за время между поступлениями двух соседних групп заявок будет обслужено ровно s заявок при условии, что после прихода первой из них общее число заявок в системе было больше s.

Как известно [1, с. 94], в случае $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ преобразование Лапласа–Стильтьеса имеет следующий вид:

$$\varphi(z) = \lambda \int_0^\infty e^{-(z+\lambda)x} dx = \frac{\lambda}{z + \lambda}.$$

Откуда

(1) $$\omega(z) = \mathsf{M} z^{\eta_n} = \varphi(\mu - \mu z) = \frac{\lambda}{\mu - \mu z + \lambda} = \frac{\rho_0}{1 + \rho_0 - z},$$

где $\rho_0 = \lambda/\mu$.

С помощью производящей функции $\omega(z)$ в общем случае можно найти среднее число обслуженных на интервале (t_n, t_{n+1}) требований:

$$\mathsf{M}\eta_n = \varphi'(\mu - \mu z)\big|_{z=1} = \mu T = \frac{1}{\rho_0}.$$

3. *Явный вид производящих функций* $\pi(z)$ *и* $P(z)$ *в модели* $GI^{\nu}|M_{\mu}|1|\infty$

3.1. СТАЦИОНАРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЦЕССА $\xi(t)$ И ВЛОЖЕННОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

В указанной выше статье [3, с. 171–175] (подробнее см. [6, с. 97–108]) для стационарного распределения вложенной цепи Маркова системы $GI^{\nu}|M_{\mu}|1|\infty$ доказана следующая теорема:

Теорема 1 [3, с. 173]. *Если выполнено условие* $\nu < \mu T$, *то стационарное распределение вложенной цепи Маркова существует и задается производящей функцией*

$$\pi(z) = \frac{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\ldots(1-\lambda_m)}{(1-\lambda_1 z)(1-\lambda_2 z)\ldots(1-\lambda_m z)}, \tag{2}$$

где числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ *являются корнями уравнения* (*считая каждый корень столько раз, какова его кратность*)

$$\alpha\left(\frac{1}{z}\right)\varphi\left(\mu-\mu z\right)=1 \tag{3}$$

принадлежащими области $|z|<1$.

Отметим, что в [3, с. 171–175] доказано, что у уравнения (3) при $|z|<1$ имеет ровно m корней с учётом кратности, а уравнение

$$\alpha\left(z\right)\varphi\left(\mu-\mu\frac{1}{z}\right)=1 \tag{4}$$

имеет при $|z|>1$ ровно m корней с учётом их кратности.

Обозначим корни уравнения (4) через z_1, z_2, ..., z_m. Тогда корни уравнений (3) и (4) связаны равенством $\lambda_k = z_k^{-1}$ для $k=1,\ldots,m$.

Иногда технически оказывается удобнее использовать уравнение (4) и его корни. При этом после замены $\lambda_k = z_k^{-1}$, $k=1,\ldots,m$, производящая функция (2) принимает вид

$$\pi(z) = \frac{(1-z_1)(1-z_2)\ldots(1-z_m)}{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_m)}. \tag{5}$$

Вторая теорема, доказанная в [3, с. 171–175], позволяет находить для системы $GI^{\nu}|M_{\mu}|1|\infty$ производящую функцию стационарного распределения процесса $\xi(t)$ через производящую функцию вложенной цепи Маркова $\pi(z)$:

Теорема 2 [3, с. 175]. *Если выполнено условие $\nu < \mu T$, то стационарное распределение процесса $\xi(t)$ существует и задается производящей функцией*

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \frac{1}{\mu T} z\pi(z)\frac{1-\alpha(z)}{1-z} + 1 - \frac{\nu}{\mu T}, \tag{6}$$

где $\pi(z)$ определяется равенством (5).

3.2. НОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЦЕССА $\xi(t)$ ДЛЯ СИСТЕМЫ $GI^{\nu}|M_{\mu}|1|\infty$

Из равенства $\rho_0 = \lambda/\mu = 1/\mu T$ следует, что выражение (6) можно записать в виде

$$P(z) = \rho_0 z \frac{1-\alpha(z)}{1-z}\pi(z) + 1 - \nu\rho_0, \tag{7}$$

а условие $\nu < \mu T$ как $\nu\rho_0 < 1$.

Введение понятия загрузки системы

$$\rho = \nu\rho_0. \tag{8}$$

показывает, что условие $\nu < \mu T$ является известным условием на загрузку системы массового обслуживания

$$\rho < 1. \tag{9}$$

Из (7) сразу следует, что вероятность того, что система свободна, равна

$$p_0 = P(0) = 1 - \nu\rho_0 = 1 - \rho. \tag{10}$$

Как хорошо известно (см, например, [5, т. 1, с. 271]), выражение

$$\frac{1-\alpha(z)}{1-z}$$

представляет собой производящую функцию «хвоста» распределения случайной величины ν_n, т.е. производящую функцию вероятностей $\alpha_k = \mathsf{P}\{\nu_n = k\}$, $k = 1, 2, ..., m$.

Однако в рассматриваемом случае, в силу того, что случайные величины ν_n неотрицательные и не принимают значение равное нулю, т.е.

$$\mathsf{P}\{\nu_n > 0\} = \mathsf{P}\{\nu_n \geqslant 1\},$$

удобнее взять в качестве вероятностей «хвоста»

$$A_k = \mathsf{P}\{\nu_n \geqslant k\} = \mathsf{P}\{\nu_n > k-1\} = \sum_{l=k}^{m}\alpha_l,$$

где $k = 1, ..., m$. При таком определении индексы в обозначениях вероятностей сдвигаются на единицу относительно обозначений, принятых в [5, т. 1, с. 271].

В силу равенства

$$\sum_{k=1}^{m}A_k = \sum_{k=1}^{m}(\alpha_k + ... + \alpha_m) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + ... + m\alpha_m) = \nu$$

скалярные величины

$$q_k = \frac{A_k}{\nu},\ k = 1, ..., m,$$

представляют собой распределение вероятностей с производящей функцией

(11) $$A(z) = \frac{1}{\nu}\sum_{k=1}^{m}A_k z^k = \sum_{k=1}^{m}q_k z^k.$$

Для $A(z)$ справедлива следующая лемма:

<u>Лемма 1.</u> *Производящая функция «нормированого хвоста» $A(z)$ и производящая функция числа заявок в группе $\alpha(z)$ связаны соотношением*

(12) $$A(z) = \frac{z}{\nu}\frac{1-\alpha(z)}{1-z}.$$

Доказательство. Следующая цепочка равенств

$$\frac{\nu}{z}A(z) = \sum_{k=1}^{m}A_k z^{k-1} =$$

$$= \alpha_1 + \alpha_2(1+z) + ... + \alpha_m\left(1 + z + ... + z^{m-1}\right) =$$

$$= \frac{\alpha_1(1-z) + \alpha_2\left(1-z^2\right) + ... + \alpha_m(1-z^m)}{1-z} =$$

$$= \frac{1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - ... - \alpha_m z^m}{1 - z} = \frac{1 - \alpha(z)}{1 - z}$$

полностью доказывает лемму.

Прямым следствием леммы (1) и представления (7) является следующая теорема:

Теорема 3. *Если выполнено условие $\rho < 1$, то стационарное распределение процесса $\xi(t)$ существует и задается производящей функцией*

(13) $$P(z) = (1 - p_0)\, \pi(z) A\,(z) + p_0,$$

где производящая функция $A\,(z)$ определяется равенством (11), *а вероятность $p_0 = (1 - \rho)$ – равенством* (10).

Замечание 1. Формула (13) показывает, что искомое распределение есть смесь вырожденного распределения и распределения, представляющего собой сумму распределений: стационарного вложенной цепи Маркова с распределением «хвоста» входящей группы требований.

Замечание 2. Представление (13) также может быть записано в виде

(14) $$P(z) = \rho \pi(z) A\,(z) + 1 - \rho.$$

4. О математическом законе стационарной очереди

4.1. О ЗНАМЕНАТЕЛЕ $\pi(z)$ В МОДЕЛИ $M_\lambda^\nu|M_\mu|1|\infty$

Для системы $M_\lambda^\nu|M_\mu|1|\infty$ уравнение (4), определяющее корни z_1, z_2, ..., z_m в представлении (5), может быть сведено к нахождению корней многочлена $R_m\,(z)$ степени m. Данный многочлен выражается через производящую функцию $A\,(z)$ «хвоста» распределения числа элементов в группе поступающих требований (11). Кроме того, знаменатель производящей функции $\pi(z)$ в представлении (5) может быть записан с помощью данного многочлена.

Лемма 2. *В системе $M_\lambda^\nu|M_\mu|1|\infty$ в качестве знаменателя производящей функции $\pi(z)$ в представлении* (5) *можно взять многочлен*

(15) $$R_m\,(z) = 1 - \rho A\,(z)\,.$$

Доказательство. Легко видеть, что из представления (1) производящей функции $\omega(z) = \varphi(\mu - \mu z)$ следует равенство

$$\varphi\left(\mu - \frac{\mu}{z}\right) = \frac{\rho_0}{1 - z^{-1} + \rho_0} = \frac{\rho_0 z}{z + \rho_0 z - 1},$$

используя которое, уравнение (4) можно записать в виде

$$\alpha(z) \frac{\rho_0 z}{z + \rho_0 z - 1} = 1,$$

а после элементарных преобразований свести к уравнению

$$\rho_0 z \frac{1 - \alpha(z)}{1 - z} = 1,$$

которое в свою очередь с учётом (12) преобразуется к виду

$$1 - \rho A(z) = 0.$$

Выражение $1 - \rho A(z)$ есть некоторый многочлен $R_m(z)$ степени m, который определяется через интенсивности λ, μ и вероятности α_2, ..., α_m формулой

$$R_m(z) = 1 - \rho_0 z \left(1 + (\alpha_2 + ... + \alpha_m) z + ... + \alpha_m z^{m-1}\right).$$

Следовательно, корни z_1, ..., z_m уравнения (4) при $|z| > 1$ суть корни многочлена $R_m(z)$, т.е удовлетворяют уравнению

(16) $$R_m(z) = 0.$$

Таким образом, лемма доказана.

4.2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ $\pi(z)$ И $P(z)$ В МОДЕЛИ $M_\lambda^\nu|M_\mu|1|\infty$ ЧЕРЕЗ ФУНКЦИЮ $A(z)$

Представление (15) для многочлена $R_m(z)$ позволяет выписать для модели $M_\lambda^\nu|M_\mu|1|\infty$ явный вид производящих функций $\pi(z)$ и $P(z)$ без нахождения корней z_1, z_2, ..., z_m. При этом оказывается, что распределения $\pi(z)$ и $P(z)$ совпадают. Докажем следующую теорему:

Теорема 4. *Если для системы $M_\lambda^\nu|M_\mu|1|\infty$ выполнено условие $\rho < 1$, то стационарное распределение процесса $\xi(t)$ существует и совпадает со стационарным распределением последовательности $\xi(t_n - 0)$, а для их производящих функцией справедливо представление*

$$P(z) = \pi(z) = \frac{1-\rho}{1-\rho A\left(z\right)}. \tag{17}$$

Доказательство. Поскольку $A\left(z\right)$ – производящая функция вероятностей, то $A\left(1\right) = 1$ и

$$R_m\left(1\right) = 1 - \rho A\left(z\right)\big|_{z=1} = 1 - \rho.$$

Поэтому (5) с учётом (15) можно записать в виде

$$\pi(z) = \frac{R_m\left(1\right)}{R_m\left(z\right)} = \frac{1-\rho}{1-\rho A\left(z\right)}.$$

Из последнего представления справедливо равенство

$$1 - \rho = \pi(z) - \rho A\left(z\right)\pi(z),$$

с учётом которого из (14) следует совпадение стационарных распределений $\pi(z)$ и $P(z)$. Действительно,

$$P(z) = \rho\pi(z)A\left(z\right) + 1 - \rho =$$

$$= \rho\pi(z)A\left(z\right) + \pi(z) - \rho A\left(z\right)\pi(z) = \pi(z).$$

Последнее равенство завершает доказательство теоремы.

4.3. О СОВПАДЕНИИ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ $\pi(z)$ И $P(z)$ СИСТЕМЫ $GI^\nu|M_\mu|1|\infty$

Рассмотрим случай, когда для системы $GI^\nu|M_\mu|1|\infty$ выполнен закон стационарной очереди. Тогда оказывается, что искомые стационарные распределения всегда совпадают с соответствующими стационарными распределениями (см. (17)) модели $M_\lambda^\nu|M_\mu|1|\infty$. Докажем данное утверждение.

Теорема 5. *Если для системы $GI^{\nu}|M_{\mu}|1|\infty$ выполнен закон стационарной очереди, то для производящих функций $\pi(z)$ и $P(z)$ справедливо представление* (17)*. Если для системы $GI^{\nu}|M_{\mu}|1|\infty$ выполнено условие $\rho < 1$, а при $|z| > 1$ корни уравнения $\alpha(z)\varphi\left(\mu - \mu z^{-1}\right) = 1$ совпадают с учётом их кратности с корнями уравнения $A(z) = \rho^{-1}$, то для системы выполняется основной закон стационарной очереди.*

Доказательство. При выполнении закона стационарной очереди верно равенство $P(z) = \pi(z)$. Подставляя $\pi(z)$ вместо $P(z)$ в формулу (14), убеждаемся в справедливости равенства

$$\pi(z) = \rho\pi(z)A(z) + 1 - \rho,$$

из которого элементарными преобразованиями для $\pi(z)$ получается представление (17). Следовательно, корни уравнения (4) должны совпадать с корнями уравнения $A(z) = \rho^{-1}$.

Обратное очевидно. На этом доказательство теоремы является законченным.

Представление (5) показывает, что в системе $GI^{\nu}|M_{\mu}|1|\infty$ при выполнении закона стационарной очереди стационарное распределение $P(z)$ зависит только от интенсивностей μ, λ и распределения числа заявок в группе.

Как было показано выше, закон стационарной очереди выполнен для модели $M_{\lambda}^{\nu}|M_{\mu}|1|\infty$. Естественно, возникает вопрос о существовании (или отсутствии) других видов входящих потоков, при которых для системы массового обслуживания выполняется основной закон стационарной очереди Хинчина. Ответ на этот вопрос в данный момент нам не известен. Вполне может оказаться, что закон стационарной очереди верен только для $M_{\lambda}^{\nu}|M_{\mu}|1|\infty$.

5. Заключение

Выше было показано, что для системы $M_\lambda^\nu|M_\mu|1|\infty$ основной закон стационарной очереди Хинчина выполняется. При выполнении данного закона для системы $GI^\nu|M_\mu|1|\infty$ искомые стационарные вероятности совпадают с соответствующими стационарными вероятностями системы $M_\lambda^\nu|M_\mu|1|\infty$. Совпадение корней уравнения (4) с корнями уравнения (16) гарантирует выполнения закона стационарной очереди для системы $GI^\nu|M_\mu|1|\infty$.

Литература

1. БОЧАРОВ П.П., ПЕЧИНКИН А.В. *Теория массового обслуживания*. – М.: РУДН, 1995. – 529 с.
2. ГНЕДЕНКО Б.В., КОВАЛЕНКО И.Н. *Лекции по теории массового обслуживания*. – К.: МИР, 1963. – 315 с.
3. СОЛОВЬЁВ А.Д., СОБОЛЕВ В.Н. *Одна система массового обслуживания с групповым поступлением требований* // Аналитические и вычислительные методы в теории вероятностей и её приложениях (АВМТВ-2017): материалы Международной научной конференции. Россия, Москва, 23-27 октября 2017. / МГУ им. М.В.Ломоносова, РУДН; [под общ. ред. А. В. Лебедева]. – Москва: Изд-во «РУДН», 2017. – 743 с.
4. ХИНЧИН А.Я. *Математическая теория стационарной очереди* // Матем. сб. – 1932. – Т. 39, №4. – С. 73–84.
5. ФЕЛЛЕР В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. – М.: МИР, 1964. – 498 с.
6. SOLOVIEV A.D., SOBOLEV V.N. *One Server Queue with Bulk Arrivals* // In: Analytical and Computational Methods in Probability Theory. ACMPT 2017. Lecture Notes in Computer Science. Vol 10684. / Eds.: Rykov V., Singpurwalla N., Zubkov A. – Cham: Springer, 2017. – 540 p.

KHINCHIN'S BASIC LAW OF A STATIONARY QUEUE FOR SINGLE-SERVER QUEUEING SYSTEMS WITH BATCH ARRIVALS

Vitaly Sobolev, Moscow, Cand.Sc., free researcher (sobolev_vn@mail.ru).

Abstract: This paper deals with a queuing system with general renewal arrivals, exponential service times, single service channel and infinite number of waiting positions, customers are serviced in the order of their arrival. For this queueing system, a condition for the fulfilment of the Khinchin's basic law of a stationary queue is given. The article shows that, in the case of basic law of a stationary queue for our system, the stationary distribution of the number of the customers in the system always coincides with the corresponding probability distribution of the queueing system with exponential interarrival times. In stationary case a new form of the probability generating functions of the number of clients in the system is also derived. This new form is written in terms of the probability generating functions of the tail distribution function of the number of customers per group and of the probability generating functions of a embedded discrete time homogeneous Markov chain.

Keywords: queueing system, batch arrivals, stationary distribution, probability generating functions, embedded Markov chain, renewal process, Khinchin's basic law of a stationary queue.

УДК 519.872
ББК 22.171

DOI: https://doi.org/10.25728/ubs.2019.77.1

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Э.Ю. Калимулиной.

Поступила в редакцию 23.12.2018.
Дата опубликования 31.01.2019.