ВЕРХНИЕ ГРАНИЦЫ МАКСИМАЛЬНОГО ОТКЛОНЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ В ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ: РОБАСТНАЯ ПОСТАНОВКА[1]

Квинто Я. И.[2], **Хлебников М. В.**[3]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Исследуется практически важный эффект максимального отклонения траектории в линейных динамических системах при ненулевых начальных условиях. Исследование переходного процесса является актуальным и практически значимым направлением в изучении линейных систем. В качестве основного способа получения оценок в настоящей работе используется построение общей квадратичной функции Ляпунова для семейства систем с неопределенностями, а также метод инвариантных эллипсоидов. Все полученные результаты остаются справедливыми также для случая нестационарной неопределенности, поскольку единственное требование к ней – это ее ограниченность в спектральной норме. Поставлены и решены задачи анализа и синтеза, а также получены верхние оценки отклонений для линейных дискретных систем, содержащих структурированную матричную неопределенность. Полученные результаты сформулированы в виде задач полуопределенного программирования, легко решаемых численным образом с помощью стандартных программных пакетов. Применение техники линейных матричных неравенств позволило минимизировать величину отклонений при стабилизации системы с помощью статической линейной обратной связи по состоянию. Результаты численного моделирования демонстрируют низкую степень консерватизма полученных оценок и обладают большим потенциалом для обобщений.

Ключевые слова: линейная дискретная система, максимальное отклонение, структурированная матричная неопределенность, линейные матричные неравенства, функция Ляпунова.

1. Введение

Изучение переходного процесса, т.е. поведения всей траектории x_k устойчивой дискретной линейной системы

(1) $$x_{k+1} = Ax_k, \quad x_k \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

[1] *Исследование выполнено при частичной поддержке РФФИ (проект №18-08-00140).*

[2] *Яна Игоревна Квинто, к.т.н.* (*yanakvinto@mail.ru*).

[3] *Михаил Владимирович Хлебников, д.ф.-м.н.* (*khlebnik@ipu.ru*).

с ненулевым начальным условием x_0, является актуальным и практически значимым направлением. При этом одной из важнейших характеристик переходного процесса является величина максимального отклонения траектории системы от нуля:

$$\xi(x_0) = \max_{k=1,2,\ldots} \frac{|x_k|}{|x_0|},$$

где $|\cdot|$ — некоторая векторная норма.

В работах [3, 6] исследовался эффект больших отклонений траекторий при ненулевых начальных условиях для непрерывных систем, в том числе с неопределенностями или при наличии внешних возмущений. В частности, было показано, что техника линейных матричных неравенств [7, 9] позволяет синтезировать законы управления, минимизирующие максимальное отклонение траектории в системе, а также дает простые, но достаточно точные оценки верхней границы максимального отклонения. Задачи синтеза для дискретных систем с различного вида неопределенностями рассматривались, например, в [2, 4].

Настоящая статья является естественным развитием идеи, предложенной в [3] для непрерывных динамических систем. А именно, в разделе 2 будут получены верхние оценки отклонений в дискретной системе, содержащей структурированную матричную неопределенность (задача анализа). В разделе 3 будет рассмотрена задача минимизации отклонений в дискретной системе управления при помощи статической линейной обратной связи по состоянию (задача синтеза). В разделе 4 рассматривается результаты численного моделирования.

В качестве основного способа получения оценок используются построение общей квадратичной функции Ляпунова для семейства систем с неопределенностями, а также метод инвариантных эллипсоидов [5]. В дальнейшем изложении все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

2. Задача анализа

Рассмотрим линейную динамическую систему в дискретном времени

(2) $$x_{k+1} = (A + F\Delta H)x_k,$$

с заданными матрицами $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $H \in \mathbb{R}^{q\times n}$, фазовым состоянием $x_k \in \mathbb{R}^n$, ненулевым начальным условием x_0 и матричной неопределенностью

$$\Delta \in \mathbb{R}^{p\times q}: \quad \|\Delta\|_2 \leqslant \gamma.$$

Единственное требование к матричной неопределенности Δ – ее ограниченность по норме. Таким образом, все полученные ниже результаты остаются справедливыми и для случая нестационарной неопределенности $\Delta(t)$.

Матрица A системы (2) предполагается шуровской, т.е. все ее собственные значения лежат внутри единичного круга.

Для дискретной системы максимальное отклонение траектории представляется выражением

$$\widehat{\xi} = \max_{\|\Delta\|_2\leqslant\gamma} \xi(\Delta) = \max_{\|\Delta\|_2\leqslant\gamma} \max_{k=1,2,\ldots} \max_{|x_0|_2=1} |x_k|_2 = \\ = \max_{\|\Delta\|_2\leqslant\gamma} \max_{k=1,2,\ldots} \|A^k\|_2.$$

Получение оценок величины $\widehat{\xi}$ представляет собой весьма сложную задачу [6]. Ниже мы получим простые и пригодные для практического применения верхние оценки отклонения путем построения общей квадратичной функции Ляпунова с применением техники линейных матричных неравенств.

Как хорошо известно, достаточное условие робастной квадратичной устойчивости семейства (2) состоит в наличии общей квадратичной функции Ляпунова. А именно, выполнение неравенства Ляпунова

(3) $$(A + F\Delta H)P(A + F\Delta H)^\top - P \prec 0$$

с некоторой матрицей $P \succ 0$ при всех допустимых значениях неопределенности Δ означает, что у семейства (2) есть общая квадратичная функция Ляпунова

$$V(x) = x^\top P^{-1}x.$$

Последовательно применяя лемму Шура и лемму Питерсена [11], представим матричное неравенство (3) в виде эквивалентного линейного матричного неравенства относительно скалярной переменной ε и матричной переменной $P \succ 0$:

$$\begin{pmatrix} P - \varepsilon\gamma^2 FF^\top & AP & 0 \\ PA^\top & P & PH^\top \\ 0 & HP & \varepsilon I \end{pmatrix} \succ 0. \tag{4}$$

Таким образом, разрешимость неравенства (4) является достаточным условием робастной квадратичной устойчивости семейства (2), см. подробнее [7].

Далее, рассмотрим эллипсоид

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n: \quad x^\top P^{-1} x \leqslant 1 \right\}$$

с матрицей P, удовлетворяющей условию (4). Эллипсоид $\mathcal{E}$ является инвариантным, т.е. траектория системы (2), начинаясь в нем ($x(0) \in \mathcal{E}$), будет оставаться в этот эллипсоиде во всех моменты времени t. Следовательно, если эллипсоид $\mathcal{E}$ содержит единичный шар

$$\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n: \quad |x|_2 \leqslant 1\},$$

то *для любого* начального условия из шара $\mathcal{B}$ траектория системы не покинет эллипсоид $\mathcal{E}$, и в каждый момент времени для ее 2-нормы верна оценка

$$|x(t)|_2 \leqslant \lambda_{\max}(P) = \sqrt{\|P\|_2}.$$

Условие $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$ эквивалентно требованию $P \succcurlyeq I$, следовательно, получаем задачу

$$\min \|P\|_2$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} P - \varepsilon\gamma^2 FF^\top & AP & 0 \\ PA^\top & P & PH^\top \\ 0 & HP & \varepsilon I \end{pmatrix} \succ 0, \qquad P \succcurlyeq I,$$

где переменными являются матрица $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и скаляр ε.

Итак, установлен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $\widehat{P}$ — решение задачи выпуклой оптимизации*

$$\min \|P\|_2$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} P-\varepsilon\gamma^2FF^\top & AP & 0\\ PA^\top & P & PH^\top\\ 0 & HP & \varepsilon I\end{pmatrix} \succ 0, \quad P \succcurlyeq I,$$

относительно матричной переменной $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и скалярной переменной ε.

Тогда для решений системы (2) *при всех допустимых неопределенностях Δ справедлива оценка отклонения*

$$\widehat{\xi} \leqslant \sqrt{\|\widehat{P}\|_2}.$$

Задача, сформулированная в теореме 1, представляет собой задачу полуопределенного программирования, легко решающуюся численно.

В рамках рассматриваемого подхода нетрудно вычислить радиус квадратичной устойчивости семейства (2), т.е. максимальный размах $\gamma_{\max}$ неопределенности Δ такой, что при всех $\gamma < \gamma_{\max}$ у семейства (2) имеется общая квадратичная функция Ляпунова:

$$\gamma_{\max} = \sup\{\gamma\colon \quad (A+F\Delta H)P(A+F\Delta H)^\top - P \prec 0 \\ \text{при некотором } P \text{ и всех } \Delta\colon \|\Delta\| \leqslant \gamma\}.$$

Соответствующий результат дается следующим утверждением, см. [7].

Лемма 1. *Пусть $\widehat{\rho}$ — решение задачи полуопределеного программирования*

$$\max \rho$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} P-\rho FF^\top & AP & 0\\ PA^\top & P & PH^\top\\ 0 & HP & I\end{pmatrix} \succ 0, \qquad P \succ 0,$$

относительно матричной переменной $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *и скалярной переменной* ρ. *Тогда радиус квадратичной устойчивости семейства* (2) *равен*

$$\gamma_{\max} = \sqrt{\widehat{\rho}}.$$

3. Задача синтеза

В этом разделе мы зададимся целью поиска стабилизирующей обратной связи для линейной дискретной системы управления. По сравнению с предыдущим разделом немного усложним постановку и рассмотрим систему управления вида

$$x_{k+1} = (A + F\Delta_1 H + M\Delta_2 N)x_k + Bu_k, \tag{5}$$

с заданными матрицами $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $H \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $M \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $N \in \mathbb{R}^{s\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, фазовым состоянием $x_k \in \mathbb{R}^n$, ненулевым начальным условием x_0, управлением $u_k \in \mathbb{R}^m$ и матричными неопределенностями Δ_1 и Δ_2 такими, что

$$\Delta_1 \in \mathbb{R}^{p\times q}: \quad \|\Delta_1\|_2 \leqslant \gamma_1,$$

$$\Delta_2 \in \mathbb{R}^{r\times s}: \quad \|\Delta_2\|_2 \leqslant \gamma_2;$$

пара (A, B) предполагается управляемой.

Как показано в [7], размах неопределенностей Δ_1 и Δ_2 можно считать общим за счет масштабирования «обрамляющих» матриц F, H, M и N; обозначим его γ:

$$\|\Delta_i\|_2 \leqslant \gamma, \qquad i = 1, 2.$$

Итак, будем искать стабилизирующую статическую линейную обратную связь по состоянию

$$u_k = Kx_k, \quad K \in \mathbb{R}^{m\times n}, \tag{6}$$

минимизирующую величину максимального отклонения в замкнутой системе.

Замкнув систему (5) обратной связью (6), приходим к замкнутой системе

$$x_{k+1} = (A + BK + F\Delta_1 H + M\Delta_2 N)x_k. \tag{7}$$

Построим квадратичную функцию Ляпунова для семейства (7) такую, что ее матрица минимальна по спектральной норме. При этом нам придется иметь дело с условием

$$(A + BK + F\Delta_1 H + M\Delta_2 N)P\times$$
$$\times\,(A + BK + F\Delta_1 H + M\Delta_2 N)^\top - P \prec 0,$$

поэтому нам понадобится модификация леммы Питерсена на случай нескольких неопределенностей, см. [7], справедливую в достаточной части. Приведем её в следующей формулировке.

Лемма 2 (Лемма Питерсена для нескольких неопределенностей). *Пусть* $G = G^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $M_i \in \mathbb{R}^{n\times p_i}$, $N_i \in \mathbb{R}^{q_i\times n}$, $i = 1,\ldots,\ell$. *Если существуют числа* $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell$ *такие, что*

$$\begin{pmatrix} G - \sum_{i=1}^{\ell}\varepsilon_i M_i {M_i}^\top & {N_1}^\top & \ldots & {N_\ell}^\top \\ * & \varepsilon_1 I & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \ldots & \varepsilon_\ell I \end{pmatrix} \succ 0,$$

то матричное неравенство

$$G + \sum_{i=1}^{\ell}(M_i\Delta_i N_i + {N_i}^\top {\Delta_i}^\top {M_i}^\top) \succ 0$$

справедливо для всех $\Delta_i \in \mathbb{R}^{p_i\times q_i}:\ \|\Delta\|_2 \leqslant 1$, $i = 1,\ldots,\ell$.

Воспользовавшись леммой 2, приходим к условию

$$\begin{pmatrix} P - \gamma^2(\varepsilon_1 FF^\top + \varepsilon_2 MM^\top) & (A+BK)P & 0 & 0 \\ P(A+BK)^\top & P & PH^\top & P^\top N^\top \\ 0 & HP & \varepsilon_1 I & 0 \\ 0 & NP & 0 & \varepsilon_2 I \end{pmatrix} \succ 0.$$

Введя вспомогательную матричную переменную $Y = KP$ и следуя идее доказательства теоремы 1, окончательно приходим к задаче:

$$\min \|P\|_2$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} P-\gamma^2(\varepsilon_1 FF^\top+\varepsilon_2 MM^\top) & AP+BY & 0 & 0\\ PA^\top+Y^\top B^\top & P & PH^\top & P^\top N^\top\\ 0 & HP & \varepsilon_1 I & 0\\ 0 & NP & 0 & \varepsilon_2 I \end{pmatrix} \succ 0,$$

$$P \succcurlyeq I,$$

относительно матричных переменных P, Y и скалярных переменных ε_1, ε_2.

При этом в силу $P \succ 0$ матрица регулятора K восстанавливается единственным образом:

$$K = YP^{-1}.$$

Итак, получено следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\widehat{P}$, $\widehat{Y}$ — решение задачи выпуклой оптимизации*

$$\min \|P\|_2$$

при

$$\begin{pmatrix} P-\gamma^2(\varepsilon_1 FF^\top+\varepsilon_2 MM^\top) & AP+BY & 0 & 0\\ PA^\top+Y^\top B^\top & P & PH^\top & P^\top N^\top\\ 0 & HP & \varepsilon_1 I & 0\\ 0 & NP & 0 & \varepsilon_2 I \end{pmatrix} \succ 0,$$

$$P \succcurlyeq I,$$

относительно матричных переменных $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и скалярных переменных ε_1, ε_2.

Тогда для решений системы (5)*, замкнутой регулятором* (6) *с матрицей*

$$\widehat{K} = \widehat{Y}\widehat{P}^{-1},$$

справедлива оценка отклонения

$$\widehat{\xi} \leqslant \sqrt{\|\widehat{P}\|_2}$$

при всех допустимых значениях неопределенностей Δ_1 *и* Δ_2.

Сделаем важное замечание: при используемом подходе, безусловно, необходимо обращать внимание и на иные показатели качества системы (накладывая на них при необходимости дополнительные ограничения). В рамках настоящей статьи такие ограничения не рассматриваются, однако авторы планируют исследовать этот аспект в последующих публикациях.

4. Пример

Рассмотрим задачу о цепочке поставок, аналогичную приведенной в [8]: в месяц с номером k ($k = 1, 2, ...$) предприятие S закупает количество u_k продукции (сырья) типа 1, доля δ_1 которого затем отбрасывается как отходы, а доля α_1 отправляется на предприятие P для производства продукции типа 2. Далее P отправляет долю α_2 своей продукции предприятию R, выпускающему продукцию типа 3, а долю δ_2 составляют отходы. Предприятие R ежемесячно отправляет производителю P долю β_3 продукции типа 3, а долю γ_3 продает сторонним предприятиям.

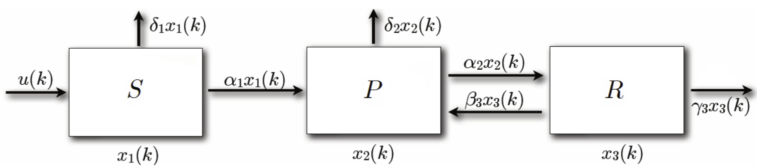

Рис. 1. Цепочка поставок

Пусть x_{ik} – объемы продукции типа i в месяц с номером k, $i = 1, 2, 3,\ k = 1, 2, \ldots$ (см. рис. 1). Объемы продукции, имеющиеся на предприятиях S, P и R к началу расчетного периода, обозначим как x_{i0}, $i = 1, 2, 3$ соответственно. Тогда получаем модель поставок в виде дискретной линейной системы

$$\begin{aligned} x_{1,k+1} &= (1-\alpha_1-\delta_1)x_{1k}+u_k,\\ x_{2,k+1} &= \alpha_1 x_{1k}+(1-\alpha_2-\delta_2)x_{2k}+\beta_3 x_{3k},\\ x_{3,k+1} &= \alpha_2 x_{2k}+(1-\beta_3-\gamma_3)x_{3k}. \end{aligned}$$

Предположим, что ежемесячные объемы отходов δ_1 и δ_2 соответственно в пунктах S и P известны неточно, и будем трактовать это в виде наличия неопределенностей Δ_1 и Δ_2 в описании системы:

$$\begin{aligned} x_{1,k+1} &= \big(1-\alpha_1-(\delta_1+\Delta_1)\big)x_{1k}+u_k,\\ x_{2,k+1} &= \alpha_1 x_{1k}+\big(1-\alpha_2-(\delta_2+\Delta_2)\big)x_{2k}+\beta_3 x_{3k},\\ x_{3,k+1} &= \alpha_2 x_{2k}+(1-\beta_3-\gamma_3)x_{3k}. \end{aligned} \tag{8}$$

Обозначив вектор фазового состояния

$$x_k = \begin{pmatrix} x_{1k} & x_{2k} & x_{3k}\end{pmatrix}^\top,$$

получим матричную запись системы (8):

$$x_{k+1} = (A + F\Delta_1 H + M\Delta_2 N)x_k + Bu_k$$

с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1-\alpha_1-\delta_1 & 0 & 0\\ \alpha_1 & 1-\alpha_2-\delta_2 & \beta_3\\ 0 & \alpha_2 & 1-\beta_3-\gamma_3\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

где $x_k \in \mathbb{R}^3$ — состояние объекта, $u_k \in \mathbb{R}$ — управление, $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathbb{R}$ — скалярные неопределенности. При этом

$$0 \leqslant 1 - \beta_3 - \gamma_3 \leqslant 1,$$
$$\alpha_i + \delta_i + \Delta_i \leqslant 1, \quad i = 1, 2. \tag{9}$$

Целью управления является минимизация резких скачков объемов продукции в пунктах S, P и R соответственно.

Примем $\alpha_1 = 0{,}7$, $\delta_1 = 0{,}1$, $\alpha_2 = 0{,}5$, $\delta_2 = 0{,}2$, $\beta_3 = 0{,}85$, $\gamma_3 = 0{,}15$. Тогда из (9) получаем

$$|\Delta_i| \leqslant \min(|1 - \alpha_i - \delta_i|, |\alpha_i + \delta_i|), \quad i = 1, 2,$$

т.е. $|\Delta_1| \leqslant 0{,}2$, $|\Delta_2| \leqslant 0{,}3$. Поэтому в качестве γ, максимального допустимого одновременно для Δ_1 и Δ_2, выберем наименьшее из вычисленных ограничений: $\gamma = 0{,}2$.

Применяя теорему 2, с помощью пакета `cvx` [10] в среде MATLAB находим матрицу

$$\widehat{P} = \begin{pmatrix} 1{,}3863 & -0{,}1522 & -0{,}3593 \\ -0{,}1522 & 1{,}7217 & -0{,}1387 \\ -0{,}3593 & -0{,}1387 & 1{,}4529 \end{pmatrix}$$

квадратичной функции Ляпунова, соответствующую матрицу

$$\widehat{K} = \begin{pmatrix} -0{,}2868 & -0{,}1667 & -0{,}1053 \end{pmatrix}$$

регулятора (6) и верхнюю оценку

$$\widehat{\xi} = 1{,}3343$$

максимального отклонения. При этом

$$\max_k \|x_k\| = 1{,}2581,$$

что свидетельствует о низком консерватизме полученной оценки.

На рис. 2 жирной линией показана динамика величины $\|x_k\|$, а тонкими линиями – изменения фазовых координат замкнутой системы при некотором начальном условии x_0 из единичного шара и неопределенностях

$$\Delta_1^k = 0{,}2\,\mathrm{sign}(\sin(k/2)), \quad \Delta_2^k = 0{,}2\,\mathrm{sign}(\cos(2k)), \quad k = 1, 2, \ldots$$

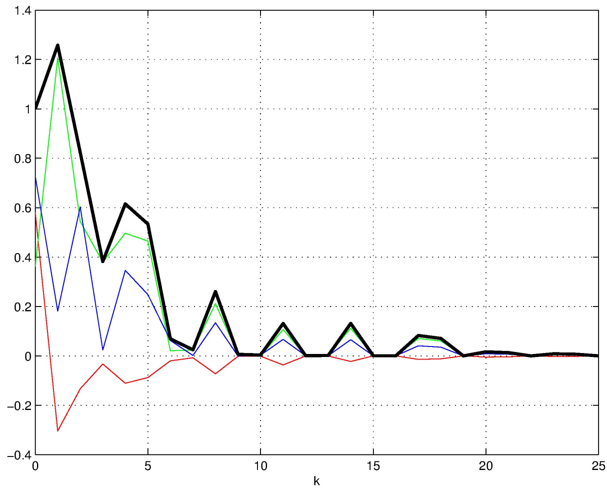

Рис. 2. Отклонения траекторий для системы с цепью поставок между тремя пунктами

5. Заключение

В статье продолжено изучение эффекта больших отклонений траекторий линейных систем с ненулевыми начальными условиями. Опираясь на ранее полученные результаты, установлены простые оценки отклонений для дискретных линейных систем при наличии структурированных матричных неопределенностей в матрице системы. Предложен подход к робастной минимизации отклонений в линейных дискретных системах управления при помощи статической линейной обратной связи по состоянию.

В дальнейшем авторы планируют рассмотреть и иные постановки задач, в частности, при наличии внешних ограниченных возмущений.

Литература

1. БАЛАНДИН Д.В., КОГАН М.М. *Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 280 с.
2. ДОРОФЕЕВ Ю.И. *Применение линейных матричных неравенств в задаче синтеза оптимального управления запасами при наличии структурных ограничений* // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Адаптивні системи автоматичного управління». – 2015. – №1(26). – С. 13–25.
3. КВИНТО Я.И., ХЛЕБНИКОВ М.В. *Верхние оценки больших отклонений в линейных системах при наличии неопределенности* // Проблемы управления. – 2018. – № 3. – С. 2–7.
4. КОГАН М.М., КРИВДИНА Л.Н. *Синтез многоцелевых линейных законов управления дискретными объектами при интегральных и фазовых ограничениях* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №7. – С. 83–95.
5. ПОЛЯК Б.Т., ТОПУНОВ М.В., ЩЕРБАКОВ П.С. *Идеология инвариантных эллипсоидов в задаче о робастном подавлении ограниченных внешних возмущений* // Стохастическая оптимизация в информатике. – 2007. – Т. 3, №1-1. – С. 51–84.
6. ПОЛЯК Б.Т., ТРЕМБА А.А., ХЛЕБНИКОВ М.В., ЩЕРБАКОВ П.С., СМИРНОВ Г.В. *Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях* // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 6. – С. 18–41.

   Англ.: POLYAK B.T., TREMBA A.A., KHLEBNIKOV M.V., SHCHERBAKOV P.S., SMIRNOV G.V. *Large Deviations in Linear Control Systems with Nonzero Initial Conditions* // Automation and Remote Control. – 2015. – Vol. 76, No. 6. – P. 957–976.

7. ПОЛЯК Б.Т., ХЛЕБНИКОВ М.В., ЩЕРБАКОВ П.С. *Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств.* – М.: ЛЕНАНД, 2014.
8. BEMPORAD A. *Discrete-Time Linear Systems. Lecture Notes on "Automatic Control". Part 1.* – University of Tremo, 2010. – URL: `http://cse.lab.imtlucca.it/~bemporad/teaching/ac/pdf/04a-TD_sys.pdf`.
9. BOYD S., EL GHAOUI L., FERON E., BALAKRISHNAN V. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory.* – Philadelphia: SIAM, 1994.
10. GRANT M., BOYD S. *CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, Version 2.1.* – URL: `http://cvxr.com/cvx/`.
11. PETERSEN I.R. *A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems* // Systems and Control Letters. – 1987. – Vol. 8. – P. 351–357.

UPPER BOUNDS OF LARGE DEVIATIONS IN LINEAR DISCRETE-TIME SYSTEMS: THE ROBUST STATEMENT

Yana Kvinto, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Senior Researcher, Ph.D (yanakvinto@mail.ru).
Mikhail Khlebnikov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Laboratory Head, Doctor of Science (khlebnik@ipu.ru).

Abstract: The paper is devoted to the study of the important effect of large deviations in linear dynamical systems with nonzero initial conditions. The study of transients is actual and practically significant direction in the linear systems theory. The common Lyapunov quadratic function for the family of systems with uncertainties and the invariant ellipsoids approach are used in the article as main technical tools. All the results obtained are also applicablefor non-stationary uncertainties: the only condition for an uncertainty is its spectral norm constraint. The analysis and design problems are considered, and the upper bounds of deviations for linear discrete-time systems with structured matrix uncertainties are obtained. The obtained results have the form of semi-definite programs, which are easy to solve numerically via standart software packages. Using the technique of linear matrix inequalities, the problem of minimization the magnitude of deviations while stabilizing the system via the linear static state feedback was investigated. Numerical simulations demonstrate the low degree of conservatism of the obtained approach. The results have a great potential for generalizations.

Keywords: linear discrete-time system, large deviations, structured matrix uncertainty, linear matrix inequalities, Lyapunov function.

УДК 519.7
ББК 32.965

DOI: https://doi.org/10.25728/ubs.2019.77.4

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии И.Б. Фуртатом.

Поступила в редакцию 28.08.2018.
Дата опубликования 31.01.2019.