

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ ТАНДЕМА СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ В КЛАССЕ ЦИКЛИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ С ПРОДЛЕНИЕМ

Зорин А. В.¹, Кочеганов В. М.²

(Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И.Лобачевского)

Рассматривается система управления с продлением тандемом управляющих систем обслуживания. В каждой системе имеются высокоприоритетные и низкоприоритетные входные потоки. Обслуживание в первой системе осуществляется по циклическому алгоритму: фиксированное количество времени обслуживаются требования высокоприоритетного потока, затем фиксированное количество времени обслуживаются требования низкоприоритетного потока. После обслуживания требования высокоприоритетного потока первой системы поступают на обслуживание во вторую систему. Во второй системе осуществляется обслуживание по циклическому алгоритму с продлением: дополнительно к циклическому обслуживанию допускается продление обслуживания по приоритетному потоку, если количество требований по низкоприоритетному потоку не превышает заданный порог. Благодаря кибернетическому подходу удалось построить строгую математическую модель, ввести необходимые случайные величины и элементы с заданными распределениями, образующие марковскую цепь и отражающие физическую постановку задачи. Также благодаря кибернетическому подходу удалось построить имитационную модель для проведения статистических экспериментов. Приведен алгоритм определения момента достижения системой стационарного режима. Представлены оценки основных показателей качества функционирования системы. При помощи экспериментов была изучена область существования стационарного распределения. При этом проверена правильность достаточных условий, найденных авторами аналитически, и показано, что данные условия могут быть расширены.

Ключевые слова: управляющая кибернетическая система, имитационная модель, циклический алгоритм с продлением, многомерная счетная марковская цепь.

¹ Андрей Владимирович Зорин, д.ф.-м.н., доцент (andrei.zorine@itmm.unn.ru).

² Виктор Михайлович Кочеганов, аспирант (kocheganov@gmail.com).

1. Введение

В современном быстро развивающемся мире достаточно остро стоит вопрос о рассмотрении комплексных систем, объединяющих в себе сразу несколько областей человеческой деятельности. Для глубокого исследования таких систем и дальнейшего управления ими необходимо уметь строить четкие математические модели и иметь соответствующий математический аппарат. В работе [2] авторы приводят общее определение «сложной системы», введенное на основе анализа большого количества математических моделей комплексных систем. Эти модели, в частности, принимают вид систем дифференциальных уравнений, конечных автоматов, динамических систем и моделей систем и сетей массового обслуживания.

Тандемы систем массового обслуживания широко используются при моделировании компьютерных и коммуникационных систем, колл-центров, аварийных служб, при планировании их мощностей, производительности и последующей оптимизации работы. Тандем является простейшей сетью из нескольких приборов, в которой заявка после обслуживания на одном устройстве поступает в очередь на обслуживание следующим устройством. Одной из первых работ, посвященная тандемам систем массового обслуживания, является работа [26]. В ней изучается распределение времени пребывания требования в системе с двумя обслуживающими устройствами. В предположении, что промежутки времени между поступлением заявок в систему и времени обслуживания независимы и имеют экспоненциальные законы распределения, было показано, что время ожидания требования в очереди первого прибора стохастически не зависит от его времени ожидания в очереди второго прибора.

Основные результаты теории тандемов в случае простейших входных потоков и экспоненциального времени обслуживания широко представлены, например, в работах [18, 19, 25]. Модели с неэкспоненциальным временем обслуживания рассмотрены, например, в статьях [21, 22, 20]. Более общие модели включают

в себя так называемые ВМАР (Batch Markovian Arrival Process) входные потоки, особенностью которых является наличие корреляции количества пришедших требований в различные моменты времени. Такие потоки рассмотрены, например, в работах [1, 5, 6, 7, 23], где проведены аналитические расчеты условий стационарности и изучено поведение некоторых характеристик обслуживания для некоторых частных видов входных потоков и распределений времени обслуживания для двухфазных (тандемных) систем, в том числе с повторными попытками и нетерпеливыми требованиями. Модель последовательных перекрестков с мгновенным перемещением машин между ними была впервые предложена в работах А.В. Зорина [4, 27, 28]. В них динамика перемещения машин от одного перекрестка к другому задается бернуллиевским распределением: каждая машина с некоторой фиксированной вероятностью $0 < p < 1$ успевает доехать до следующего перекрестка и с противоположной вероятностью $1 - p$ остается «между» ними. В работе [11] последняя модель усложняется возможностью продления обслуживания требований приоритетного потока, если по неприоритетному направлению поступило в некотором смысле мало требований.

В данной статье представлено описание имитационной модели для задачи, рассмотренной в работах [8–13]. Приводятся численные результаты по получению оценок основных характеристик качества функционирования системы в стационарном режиме: среднее и дисперсия времени ожидания произвольной заявки до начала обслуживания, среднее и дисперсия времени пребывания произвольного требования в системе, средние и дисперсии длин очередей.

2. Тандем перекрестков как единая управляющая система

Рассмотрим тандем из двух автомобильных перекрестков (рис. 1). Машины, поступающие на первый перекресток в горизонтальном и вертикальном направлениях, образуют входящие потоки Π_1 и Π_5 соответственно. Каждая машина из потока Π_1 ,

проезжая первый перекресток, немгновенно попадает на второй перекресток и образует поток машин Π_2 . Также на второй перекресток поступают машины с вертикального направления и образуют входящий поток Π_3 . Машины потока Π_3 имеют более низкий приоритет по сравнению с машинами горизонтального направления и могут проехать перекресток только если их количество превысит определенный числовой порог. Для описания «немгновенности» перемещения машин между перекрестками удобно ввести промежуточный поток Π_4 , состоящий из всех машин, обслуженных на первом перекрестке в горизонтальном направлении.

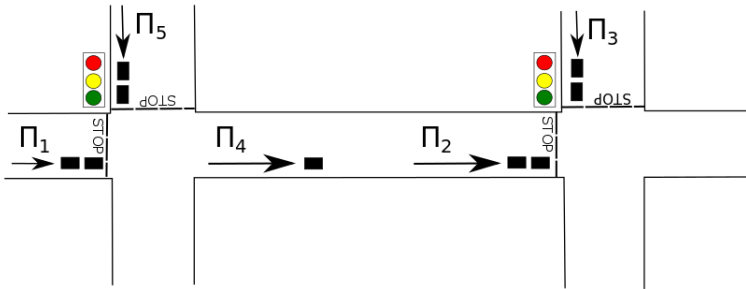


Рис. 1. Пример: тандем перекрестков

Предполагается, что светофор на первом перекрестке имеет лишь два состояния $g_{1,1}$ и $g_{1,2}$: в состоянии $g_{1,1}$ машины потока Π_1 пропускаются фиксированное количество времени $\tilde{T}^{(1,1)}$ (зеленый свет для Π_1); в состоянии $g_{1,2}$ — простаивают в течение времени $\tilde{T}^{(1,2)}$ (красный свет для Π_1). Светофор на втором перекрестке обслуживает по циклическому алгоритму с продлением: дополнительно к состоянию обслуживания потока Π_3 (состояние $g_{2,1}$) также имеется два состояния обслуживания потока Π_2 (состояния $g_{2,2}$ и $g_{2,3}$). Первое из них включается всегда после завершения обслуживания потока Π_3 , а второе включается, если после очередного такта обслуживания потока Π_2 длина очереди O_3 не превосходит уровня L . Длительности пребывания светофора на

втором перекрестке в каждом из состояний суть $\tilde{T}^{(2,1)}$, $\tilde{T}^{(2,2)}$ и $\tilde{T}^{(2,3)}$.

Для анализа тандема перекрестков удобно рассматривать его как единую стохастическую управляющую систему. Для этого предположим наблюдение за перекрестками только в дискретные моменты переключения состояния хотя бы одного из светофоров. Можно показать, что количество различных состояний у полученной системы конечно. Действительно, положим, например, за состояние объединенной системы вектор $(g^{(1)}, g^{(2)}, s, t)$, где $g^{(1)} \in \{g_{1,1}, g_{1,2}\}$ — состояние 1-го перекрестка, $g^{(2)} \in \{g_{2,1}, g_{2,2}, g_{2,3}\}$ — состояние 2-го перекрестка, $s \in \{0, 1, 2\}$ — номер последнего сменившего состояние перекрестка (принимает значение 0 в случае если сменили состояние оба перекрестка) и $t \in \{0, 1, 2, \dots, T\}$ — количество времени, оставшееся у продолжающего обслуживание с прошлого такта перекрестка (принимает значение 0, если величина s принимает значение 0). Здесь T — максимальная длительность нахождения каждого из светофоров в одном состоянии. Тогда количество различных состояний нетрудно посчитать и оно не будет превышать величины $2 \times 3 \times 3 \times T$.

Отметим, что при прохождении перекрестков машины предполагаются движущимися только в прямом направлении, т.е. перемешивание потоков не допускается. Таким образом, поток Π_5 не представляет интереса для дальнейшего исследования системы и может быть исключен из рассмотрения.

Для построения строгой математической модели системы будем придерживаться кибернетического подхода (см. [4]). Схема кибернетической управляющей системы приведена на рис. 2. На схеме присутствуют следующие блоки: 1) внешняя среда с одним состоянием; 2) входные полюса первого типа — входные потоки $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$; 3) входные полюса второго типа — потоки насыщения $\Pi_1^{\text{нас}}, \Pi_2^{\text{нас}}, \Pi_3^{\text{нас}}, \Pi_4^{\text{нас}}$; 4) внешняя память — очереди O_1, O_2, O_3, O_4 ; 5) устройство по переработке информации внешней памяти — устройства по поддержанию дисциплины очереди $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$; 6) внутренняя память — обслуживающее устройство (ОУ); 7) устройство по переработке информации во внутренней

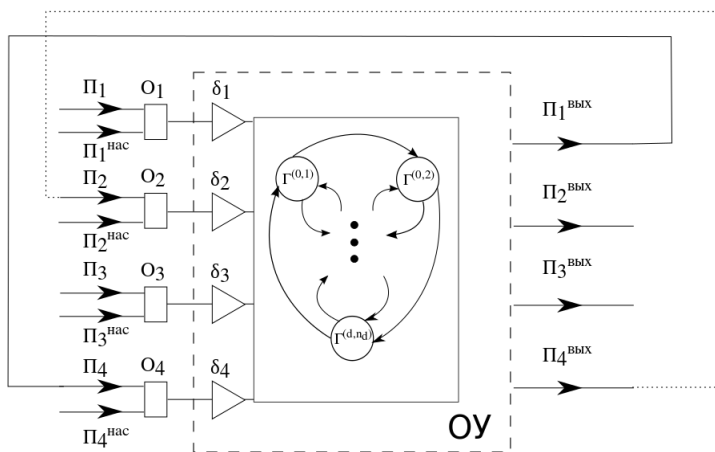


Рис. 2. Структурная схема системы обслуживания

памяти — граф смены состояний; 8) выходные полюса $\Pi_1^{\text{ВЫХ}}$, $\Pi_2^{\text{ВЫХ}}$, $\Pi_3^{\text{ВЫХ}}$, $\Pi_4^{\text{ВЫХ}}$. Координатой блока является номер этого блока на схеме.

Для задания информации блоков введем следующие величины и элементы, а также укажем множества их возможных значений. В качестве дискретной временной шкалы выберем последовательность $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \dots$ моментов смены состояния обслуживающего устройства. Обозначим $\Gamma_i, i \geq 1$, из множества Γ — состояние обслуживающего устройства в течение времени $(\tau_{i-1}; \tau_i]$ и $\Gamma_0 \in \Gamma$ — в момент времени τ_0 , количество $\varkappa_{j,i} \in \mathbb{Z}_+, i \geq 0$, требований в очереди O_j в момент времени τ_i , количество $\eta_{j,i} \in \mathbb{Z}_+, i \geq 0$, требований, поступивших в очередь O_j по потоку Π_j в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$, количество $\xi_{j,i} \in \mathbb{Z}_+, i \geq 0$, требований по потоку насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$, количество $\bar{\xi}_{j,i} \in \mathbb{Z}_+, i \geq 0$, реально обслуженных требований по потоку Π_j в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$.

В общем виде управляющая система, описывающая тандем перекрестков, имеет следующий вид (рис. 2). В систему с одним обслуживающим устройством поступают потоки Π_1, Π_2, Π_3

и Π_4 . Требования по потоку Π_j становятся в соответствующую очередь O_j с неограниченной вместимостью, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Для $j \in \{1, 2, 3\}$ дисциплина очереди O_j , поддерживаемая устройством δ_j , имеет тип FIFO (First In First Out). Таким образом, для обслуживания из соответствующей очереди выбирается то требование, которое пришло раньше. Дисциплина очереди O_4 будет описана ниже. Входные потоки Π_1 и Π_3 формируются внешней средой, которая, будем предполагать, имеет только одно состояние, т.е. вероятностная структура потоков не меняется с течением времени. Требования потоков Π_1 и Π_3 формируют независимые между собой неординарные пуассоновские потоки, т.е. стационарные, без последствия и ординарные потоки групп требований. Интенсивности соответствующих простейших потоков для Π_1 и Π_3 будем обозначать λ_1 и λ_3 , а распределение числа заявок в группе по потоку Π_j будем описывать производящей функцией

$$(1) \quad f_j(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{\nu}^{(j)} z^{\nu}, \quad j \in \{1, 3\},$$

которая предполагается аналитической при любом $z \in \mathbb{C}$ таким, что $|z| < (1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Величина $p_{\nu}^{(j)}$ определяет вероятность того, что по потоку Π_j число требований в группе равно ν . Обслуженные требования потока Π_1 поступают на повторное обслуживание, формируя на выходе поток Π_4 . Обслуженные требования потока Π_4 в свою очередь поступают на повторное обслуживание, формируя при этом поток Π_2 . Потоки Π_2 и Π_3 являются конфликтными, что означает запрет на одновременное обслуживание требований этих потоков и, следовательно, исследование системы не может быть сведено к задаче с меньшим числом потоков.

В каждый момент времени обслуживающее устройство находится в одном из конечного множества состояний $\Gamma = \{\Gamma^{(k,r)} : k = \overline{0, d}; r = \overline{1, n_k}\}$ с заданными натуральными числами d, n_0, n_1, \dots, n_d . В каждом состоянии $\Gamma^{(k,r)}$ обслуживающее устройство находится в течение неслучайного времени $T^{(k,r)}$. Введем непересекающиеся подмножества $\Gamma^I, \Gamma^{II}, \Gamma^{III}$ и Γ^{IV} множества Γ следующим образом. В состоянии $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma^I$

обслуживаются только требования из очередей O_1 , O_2 и O_4 . В состоянии $\gamma \in \Gamma^{ii}$ обслуживаются только требования из очередей O_2 и O_4 . В состоянии $\gamma \in \Gamma^{iii}$ обслуживаются только требования из очередей O_1 , O_3 и O_4 . В состоянии $\gamma \in \Gamma^{iv}$ обслуживаются только требования из очередей O_3 и O_4 . Тогда множество Γ есть объединение $\Gamma = \Gamma^I \cup \Gamma^{II} \cup \Gamma^{III} \cup \Gamma^{IV}$ непересекающихся подмножеств. Также в дальнейшем нам понадобятся множества ${}^1\Gamma = \Gamma^I \cup \Gamma^{III}$, ${}^2\Gamma = \Gamma^I \cup \Gamma^{II}$, ${}^3\Gamma = \Gamma^{III} \cup \Gamma^{IV}$.

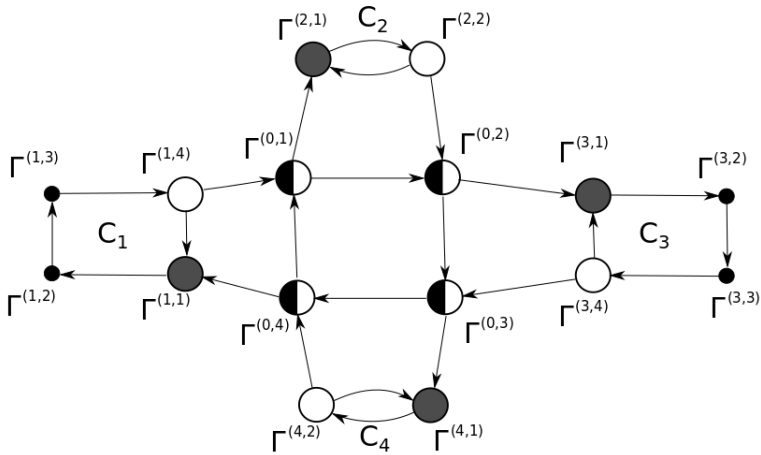


Рис. 3. Класс графов переходов. Незакрашенные вершины являются выходными вершинами, большие черные вершины – входные, небольшие черные – нейтральные, наполовину закрашенным вершинам соответствуют состояния продления

Смена состояний обслуживающего устройства осуществляется по следующему правилу. Множество состояний $C_k = \{\Gamma^{(k,r)} : r = \overline{1, n_k}\}$ будем называть k -м циклом, $k = \overline{1, d}$ (рис. 3). Состояние вида $\Gamma^{(0,r)}$ будем называть состоянием продления, $r = \overline{1, n_0}$. Положим $r \oplus_k 1 = r + 1$ для $r = \overline{1, n_k - 1}$ и $r \oplus_k 1 = 1$ при $r = n_k$, $k = \overline{0, d}$. В цикле C_k выделим подмножества C_k^O выходных, C_k^I входных и $C_k^N = C_k \setminus (C_k^O \cup C_k^I)$ нейтральных состояний. Тогда после состояния $\Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^O$

обслуживающее устройство переходит в состояние $\Gamma^{(k,r \oplus_k 1)}$ того же цикла C_k . При $\Gamma^{(k,r)}$, принадлежащем множеству C_k^O , прибор переходит в состояние $\Gamma^{(k,r \oplus_k 1)}$, если число требований в очереди O_3 в момент переключения больше заданного порога L . В противном случае, т.е. если число требований в очереди O_3 меньше либо равно L , новое состояние прибора будет состоянием продления $\Gamma^{(0,r_1)}$, где $r_1 = h_1(\Gamma^{(k,r)})$ и $h_1(\cdot)$ — заданное отображение множества $\bigcup_{k=1}^d C_k^O$ во множество $\{1, 2, \dots, n_0\}$. После состояния $\Gamma^{(0,r)}$ выбирается состояние того же вида $\Gamma^{(0,r_2)}$, если число требований в очереди O_3 меньше или равно L , где $r_2 = h_2(r)$ и $h_2(\cdot)$ — заданное отображение множества $\{1, 2, \dots, n_0\}$ на себя; в противном случае включается входное состояние $\Gamma^{(k,r_3)} \in C_k^I$, где $\Gamma^{(k,r_3)} = h_3(r)$ и $h_3(\cdot)$ — заданное отображение множества $\{1, 2, \dots, n_0\}$ на множество $\bigcup_{k=1}^d C_k^I$. Считается, что все состояния продления $\Gamma^{(0,r)}$ принадлежат множеству ${}^2\Gamma$, а также верны соотношения $C_k^O \subset {}^2\Gamma$ и $C_k^I \subset {}^3\Gamma$. Также будем предполагать, что все циклы имеют ровно одно входное и одно выходное состояние. И последним предположением является то, что все вершины продления образуют один цикл, т.е. можем положить $h_2(r) = r \oplus 1$.

Таким образом, смена состояний обслуживающего устройства задается соотношением

$$(2) \quad h(\Gamma^{(k,r)}, y) = \begin{cases} \Gamma^{(k,r \oplus_k 1)}, & \text{если } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^O); \\ & \text{или } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k^O \ \& \ y > L); \\ \Gamma^{(0,h_1(\Gamma^{(k,r)}))}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k^O \ \text{и} \ y \leq L; \\ \Gamma^{(0,r \oplus 1)}, & \text{если } k = 0 \ \text{и} \ y \leq L; \\ h_3(r), & \text{если } k = 0 \ \text{и} \ y > L. \end{cases}$$

Закон изменения состояния обслуживающего устройства будем предполагать заданным соотношением

$$\Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}),$$

где отображение $h(\cdot, \cdot)$ определено в (2). Для определения длительности T_{i+1} состояния обслуживающего устройства в течение

времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$ удобно ввести функцию $h_T(\cdot, \cdot)$:

$$T_{i+1} = h_T(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}) = T^{(k,r)}, \quad \text{где } k \text{ и } r \text{ таковы, что } \Gamma^{(k,r)} = \Gamma_{i+1}.$$

Функциональная зависимость

$$(3) \quad \bar{\xi}_{j,i} = \min\{\varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}, \quad j \in \{1, 2, 3\},$$

между величиной $\bar{\xi}_{j,i}$ и величинами $\varkappa_{j,i}, \eta_{j,i}, \xi_{j,i}$ реализует стратегию механизма обслуживания требований. Далее, поскольку

$$\varkappa_{j,i+1} = \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \bar{\xi}_{j,i}, \quad j \in \{1, 2, 3\},$$

то из выражения (3) следует соотношение

$$\varkappa_{j,i+1} = \max\{0, \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

Из формулировки поставленной задачи (см. также структурную схему на рис. 2) следуют соотношения для потока Π_4 :

$$\eta_{4,i} = \min\{\xi_{1,i}, \varkappa_{1,i} + \eta_{1,i}\}, \quad \varkappa_{4,i+1} = \varkappa_{4,i} + \eta_{4,i} - \eta_{2,i}, \quad \xi_{4,i} = \varkappa_{4,i}.$$

Нелокальное описание входных потоков и потоков насыщения состоит в указании некоторых свойств условных распределений выделенных дискретных компонент $\eta_i = (\eta_{1,i}, \eta_{2,i}, \eta_{3,i}, \eta_{4,i})$ и $\xi_i = (\xi_{1,i}, \xi_{2,i}, \xi_{3,i}, \xi_{4,i})$ маркированных точечных процессов $\{(\tau_i, \nu_i, \eta_i); i \geq 0\}$ и $\{(\tau_i, \nu_i, \xi_i); i \geq 0\}$ при фиксированных значениях метки $\nu_i = (\Gamma_i; \varkappa_i)$, где $\varkappa_i = (\varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i})$. Введем функции $\varphi_1(\cdot, \cdot)$ и $\varphi_3(\cdot, \cdot)$ из разложений

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \varphi_j(\nu, t) = \exp\{\lambda_j t (f_j(z) - 1)\},$$

где $f_j(z)$ определены выражением (1), $j \in \{1, 3\}$. Функция $\varphi_j(\nu, t)$ по своему смыслу есть вероятность поступления $\nu = 0, 1, \dots$ требований по потоку Π_j за время $t \geq 0$. Положим $\varphi_j(\nu, t)$ равной нулю при $\nu < 0$. Функцию $\psi(\cdot, \cdot, \cdot)$ зададим формулой

$$\psi(k; y, u) = C_y^k u^k (1 - u)^{y-k}.$$

По своему смыслу $\psi(k; y, u)$ есть вероятность поступления k требований по потоку Π_2 при условии, что очередь O_4 содержит y требований и обслуживающее устройство находится в состоянии $\Gamma^{(k,r)}$, так что $u = p_{k,r}$. При нарушении условия $0 \leq k \leq y$ положим $\psi(k; y, u)$ равной нулю.

Пусть $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{Z}_+^4$ и $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}_+^4$. Тогда из постановки задачи на содержательном уровне следует, что при фиксированном значении метки $\nu_i = (\Gamma^{(k,r)}; x)$ вероятность $\varphi(a, k, r, x)$ одновременного выполнения равенств $\eta_{1,i} = a_1, \eta_{2,i} = a_2, \eta_{3,i} = a_3, \eta_{4,i} = a_4$ есть

$$\varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \psi(a_2, x_4, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) \times \\ \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \delta_{a_4, \min\{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1), x_1 + a_1\}},$$

где \tilde{k} и \tilde{r} таковы, что $\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$, через $\ell(k, r, j)$ обозначено количество требований в потоке насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$, когда обслуживающее устройство находится в состоянии $\Gamma^{(k,r)}$, и $\delta_{i,j}$ есть символ Кронекера:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Пусть $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{Z}_+^4$. Из содержательной постановки задачи также следует, что вероятность $\zeta(b, k, r, x)$ одновременного выполнения равенств $\xi_{1,i} = b_1, \xi_{2,i} = b_2, \xi_{3,i} = b_3, \xi_{4,i} = b_4$ при фиксированном значении $(\Gamma^{(k,r)}; x)$ метки ν_i есть

$$(4) \quad \delta_{b_1, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)} \times \delta_{b_2, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 2)} \times \delta_{b_3, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \times \delta_{b_4, x_4}.$$

Из формулы (4) следует для $j \in \{1, 2, 3\}$, что вероятность события $\xi_{j,i} = 0$ равна 1 в случае $h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \notin {}^j\Gamma$ и что вероятность события $\xi_{j,i} = \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, j)$ равна 1, если $\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \in {}^j\Gamma$.

В предыдущих работах [12, 13] была исследована последовательность $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ и была доказана ее марковость. Также для нее найдено достаточное условие существования стационарного распределения в виде выполнения системы

неравенств:

$$(5) \min_{k=0,d} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 1)}{\lambda_1 f'_1(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}} > 1, \min_{k=1,d} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 3)}{\lambda_3 f'_3(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}} > 1.$$

Содержательный смысл данных условий состоит в следующем. Среднее количество требований, поступающих за полный цикл работы светофора ($\lambda_1 f'_1(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}$), не должно превышать максимально возможное количество обслуживаемых требований по данному потоку ($\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 1)$). Это условие должно выполняться для всех типов циклов функционирования перекрестков для обслуживания требований первого Π_1 и третьего Π_3 потоков.

3. Исследование системы управления тандемом с помощью имитационной модели

3.1. ОПИСАНИЕ ИМИТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ

На основании физической постановки задачи и математической модели была построена компьютерная имитационная модель для тандема перекрестков. Первоначально фиксируются параметры входных потоков: λ_j , $p_\nu^{(j)} > 0$ ($j = 1, 3$, $\nu = 1, 2, \dots$); параметры перекрестков: $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_{\text{prolong}}$; параметры алгоритма управления перекрестками: $\tilde{T}^{(1,1)}$, $\tilde{T}^{(1,2)}$, $\tilde{T}^{(2,1)}$, $\tilde{T}^{(2,2)}$, $\tilde{T}^{(2,3)}$, L . Здесь величины μ_1 , μ_2 и μ_3 описывают интенсивности обслуживания требований потоков Π_1 , Π_2 и Π_3 соответственно: $\ell(k, r, j) = [\mu_j T^{(k,r)}]$, если поток Π_j обслуживается и $\ell(k, r, j) = 0$ если не обслуживается. Величина μ_{prolong} описывает интенсивность обслуживания требований потока Π_2 при продлении. Величина μ_4 определяет вероятность $p_{k,r}$ проезда автомобиля между перекрестками для состояния $\Gamma^{(k,r)}$ продолжительностью $T^{(k,r)}$ по формуле $p_{k,r} = 1 - \exp(-T^{(k,r)} \mu_4)$.

Следующим шагом работы программы является объединение множеств состояний двух перекрестков и создание общего множества состояний для единой системы массового обслуживания. Это объединение осуществляется по схеме, описанной в постановке задачи. Также результатом работы на данном этапе является граф переходов из одного состояния обслуживающего устройства в другое.

Для решения вопроса о моменте завершения переходных процессов в системе производилась одновременная имитация системы с двумя различными начальными условиями. Во-первых, запускалась имитация системы при отсутствии ожидающих или находящихся на обслуживании требований в системе в момент начала ее функционирования, а во-вторых – при наличии ненулевого количества требований, находящихся в каждой очереди в момент начала функционирования системы. Следуя работе [16], систему при таких ненулевых начальных очередях будем в дальнейшем называть смещенной, а величины, подсчитанные для нее, будем отмечать верхним индексом «+». Напротив, систему при пустых начальных очередях называем несмещенной и относящиеся к ней величины выделяем верхним индексом «0». Ниже приведем алгоритм определения момента достижения системой стационарного режима по условию близости некоторых величин для смещенной и несмещенной систем. После завершения переходных процессов имитация продолжается лишь для несмещенной системы. В связи с этим отсутствие у некоторой величины верхнего индекса «0» и «+» будет указывать на то, что ее значение подсчитывается для системы, находящейся в стационарном режиме. В случае отсутствия у величины индекса «0» или «+» будем считать ее посчитанной для стационарного режима для несмещенной системы.

При построении компьютерной имитационной модели в работе существенно использовался кибернетический подход и, в частности, нелокальное описание введенных блоков. Это позволило избежать генерирования большого количества событий и их длительной обработки, сократив время имитации. В качестве состояния системы выбирался вектор длин очередей (количеств требований в очередях) для смещенной и несмещенной систем, а также состояния, в которых находятся обслуживающие устройства. Состояние системы моделировалось в моменты смены состояний обслуживающего устройства. Требования, поступающие на обслуживание по потокам Π_1 и Π_3 , генерируются в начале каждого цикла моделирования в соответствии с законом их рас-

пределения. В качестве дополнительной статистики для каждого требования запоминаются моменты его поступления в систему и ухода из нее, а также время до начала его обслуживания.

Сравним предложенный в этой работе подход с известным методом дискретных событий, изложение которого можно найти в монографиях [17, 24] и используемого, например, в недавних работах по близкой тематике [16, 14]. Так, в рамках метода в качестве наблюдаемых событий обычно выбирались приход в систему или уход из системы каждого требования, каждое изменение состояния обслуживающего устройства и т.п. Таким образом генерируется все множество возможных событий и формируется исчерпывающее описание всего процесса обслуживания в системе. Для анализа системы такая информация, как правило, оказывается избыточной, поэтому в этой работе имитация происходит для нелокального описания системы.

Таким образом, имитационная модель в данной работе строится на основе единого, кибернетического подхода, примененного в предыдущем разделе для построения математической модели. Главным преимуществом такого подхода по сравнению с методом дискретных событий является удобная последовательность моментов наблюдения. Удобство наблюдения за системой только в моменты смены состояния обслуживающего устройства в том, что точные моменты прибытия требований могут быть смоделированы сразу для группы требований. Кроме того, при отсутствии информации о точном распределении времен пребывания требований внутри группы в случае кибернетического подхода появляется возможность приближенного моделирования этих времен — приписав всем требованиям группы время прибытия, совпадающее с началом актом функционирования системы.

Опишем имитационную модель более подробно. Пусть индекс $j \in \{1, 3\}$ указывает на номер потока, а число $n = 1, 2, \dots$ — на номер такта функционирования системы. В имитационной модели отслеживаются значения следующих величин: $\gamma_{j,\nu}^0$ и $\gamma_{j,\nu}^+$ — времена ожидания начала обслуживания требования с номером ν потока Π_j в несмещенной и смещенной системах соответствен-

но; t_n — длительность n -го такта; $\alpha_{in,j,n}^0$ и $\alpha_{in,j,n}^+$ — количество требований потока Π_j , пришедших за n -й такт работы системы; $\alpha_{out,j,n}^+$ и $\alpha_{out,j,n}^+$ — количество требований потока Π_j , обслуженных на цикле с номером n работы системы; $\beta_{j,n}$ равно количеству требований, находящихся в очереди O_j , если обслуживающее устройство только начало обслуживать очередь O_j , и равно 0 в остальных случаях; $\zeta_{j,\nu}$ — время нахождения в системе требования ν потока Π_j с момента его поступления и до момента выхода из системы. Заметим, что время $\zeta_{1,\nu}$ считается с момента поступления требования в систему в качестве требования потока Π_1 до момента выхода этого требования из системы после его обслуживания как требования потока Π_4 . Каждый раз, когда в системе происходит событие, оно обрабатывается и значения отслеживаемых величин изменяются. Имитация заканчивается, если в системе не обнаружен стационарный режим за некоторое максимальное число тактов функционирования $N_{nonstat}$, или если количество тактов после достижения стационарного режима превышает некоторое фиксированное количество N_{stat} . Числа $N_{nonstat}$ и N_{stat} , вообще говоря, зависят от параметров модели и должны быть тем больше, чем ближе параметры к границе области стационарности. Авторами экспериментально подобрано значение $N_{nonstat} = N_{stat} = 100000$, подходящее для всех наборов параметров, рассматриваемых в статье.

3.2. АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТА ДОСТИЖЕНИЯ КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА

Как правило, под стационарным режимом на содержательном уровне понимают такой режим функционирования системы, устанавливающийся с течением времени, при котором выделенные ее характеристики остаются неизменными. Идея алгоритма определения момента достижения системой такого режима в данной работе заключается в следующем. Наблюдаем одновременно за динамикой смещенной и несмещенной систем и считаем для каждой из них некоторые усредненные величины. Момент, когда эти величины станут достаточно близки, считаем моментом окончания переходных процессов. Формализуем алгоритм. Зафикси-

136

руем параметры метода: $0 < \delta_1$, $1 < \delta_2$ и $1 < \delta_3$. В конце каждого такта будем считать значения

$$(6) \quad \gamma_{j,\cdot}^0 = \frac{1}{\tilde{\nu}_j^0} \sum_{\nu} \gamma_{j,\nu}^0, \quad \gamma_{j,\cdot}^+ = \frac{1}{\tilde{\nu}_j^+} \sum_{\nu} \gamma_{j,\nu}^+$$

средних времен ожидания обслуживания требований потоков Π_j в несмещенной и смещенной системах соответственно. Здесь $\tilde{\nu}_j^0$ и $\tilde{\nu}_j^+$ есть общее количество требований, пришедших по потоку Π_j , $j = 1, 3$, в несмещенной и смещенной системах соответственно. Кроме того, для несмещенной системы будем считать количество требований для входящего и выходящего потоков:

$$(7) \quad F_{in,1}^0 = \sum_n \alpha_{in,1,n}^0, \quad F_{out,4}^0 = \sum_n \alpha_{out,4,n}^0$$

$$(8) \quad F_{in,3}^0 = \sum_n \alpha_{in,3,n}^0, \quad F_{out,3}^0 = \sum_n \alpha_{out,3,n}^0.$$

Стационарный режим считается достигнутым если выполнены все неравенства:

$$(9) \quad \frac{|\gamma_{j,\cdot}^0 - \gamma_{j,\cdot}^+|}{\gamma_{j,\cdot}^0} < \delta_1, \quad \frac{F_{in,1}^0}{F_{out,4}^0} < \delta_2, \quad \frac{F_{in,3}^0}{F_{out,3}^0} < \delta_3.$$

Заметим, что из-за сложности системы уже не достаточно учета только первого неравенства в (9), как было сделано, например, в работе [16]. Для большей стабильности критерия останковки для модели тандема систем были добавлены второе и третье условия в (9). Интуитивно эти условия означают, что при наличии стационарного режима в системе количество требований, поступивших на перекресток, не должно превышать количества требований, ушедших с него. Для вычислительной устойчивости в неравенствах допускается погрешность $(\delta_j - 1)$, $j = 2, 3$.

3.3. ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА РАБОТЫ СИСТЕМЫ

После того как стационарный режим в системе достигнут, можно приступить к оценке основных показателей качества функционирования системы. С этой целью продолжается процесс имитации, но только для несмещенной системы. Необходимо получить оценки для математического ожидания времени пребывания произвольного требования потока Π_j , $j \in \{1, 3\}$. За основу

были взяты известные в теории вероятностей и математической статистике оценки соответствующих количественных характеристик. Оценки для времени пребывания в системе были построены по наблюдениям за каждым обслуженным требованием выделенной реализации потока Π_j . Итак, для каждого $j = 1, 3$ предлагаются следующие оценки для показателей качества работы системы по потоку Π_j :

- $\hat{E}\gamma_j = \frac{1}{\nu_j} \sum_{\nu} \zeta_{j,\nu}$ – оценка математического ожидания времени пребывания в системе произвольного требования потока Π_j .

Кроме того, имеет смысл получить оценки, характеризующие работу системы не по отдельному потоку, а для системы в целом. Для этого предлагается строить средние взвешенные оценки, где в качестве веса отдельному потоку приписывается интенсивность поступления его требований, т.е. величина, равная $\lambda_j \sum_{\nu \geq 1} \nu p_{\nu}^{(j)}$. Итак, имеем следующую оценку целевой функции:

- $$\hat{E}\gamma = \frac{\sum_{j \in \{1,3\}} (\lambda_j \sum_{\nu \geq 1} \nu p_{\nu}^{(j)}) \hat{E}\gamma_j}{\sum_{j \in \{1,3\}} \lambda_j \sum_{\nu \geq 1} \nu p_{\nu}^{(j)}}.$$

3.4. АНАЛИЗ ОБЛАСТИ СТАЦИОНАРНОСТИ СИСТЕМЫ

Для анализа функционирования тандема перекрестков были зафиксированы следующие параметры:

- $\lambda_1 = 0,35, p_1^{(1)} = 0,4, p_2^{(1)} = 0,4, p_3^{(1)} = 0,2, p_{\nu}^{(1)} = 0, \nu > 3;$
- $(\tilde{T}^{(1,1)}, \tilde{T}^{(1,2)}) = (20, 10), \mu_1 = 1,2;$
- $\lambda_3 = \{0,1; 0,2\}, p_1^{(3)} = 0,4, p_2^{(3)} = 0,3, p_3^{(3)} = 0,3, p_{\nu}^{(3)} = 0, \nu > 3;$
- $\mu_4 = 0,001.$

Здесь представлены два набора параметров, отличающихся лишь интенсивностью λ_3 поступления групп требований по потоку Π_3

(выделены жирным шрифтом). Для алгоритма управления перекрестками зафиксируем длительность $\tilde{T}^{(2,3)} = 10$ продления зеленого сигнала светофора для потока Π_2 и порог $L = 10$ продления.

При фиксированном наборе параметров ($\lambda_3 = 0,1$ либо $\lambda_3 = 0,2$) проводилась серия экспериментов, в которых перебирались значения для длительности обслуживания $\tilde{T}^{(2,1)} = \{1, 5, 9, \dots, 97\}$ требований потока Π_3 и длительности обслуживания $\tilde{T}^{(2,2)} = \{1, 5, 9, \dots, 97\}$ потока Π_2 .

На рис. 4 представлены результаты экспериментов. По осям координат отложены значения $T^{(2,1)}$ длительности обслуживания требований потока Π_3 и значения $T^{(2,2)}$ длительности обслуживания требований потока Π_2 . Желтым цветом обозначены точки, в которых было определено достижение системой стационарного режима. Темно-зеленым цветом обозначены случаи отсутствия стационарности. Кроме того, на графике черным цветом изображена область стационарности, полученная из достаточных условий 5.

Из графика видно, что желтая область выходит далеко за границы черных линий. Это свидетельствует о том, что достаточное условие, полученное в работе аналитически, не является необходимым. Ввод дополнительного режима продления по высокоприоритетному потоку при отсутствии большого числа требований по низкоприоритетному потоку позволяет существенно расширить область стационарности системы. Интуитивно данный результат ожидаем: при отсутствии требований по одному из потоков другой поток получает дополнительный временной «запас» для обслуживания за счет продления.

Также на графике изображена область, ограниченная снизу серой линией. Эта область получена эмпирическими рассуждениями и дает «примерную» оценку области стационарности для системы с продлением. Рассуждения для вывода этой границы основаны на подсчете «среднего» количества времени, освобождающегося для обслуживания требований потока Π_2 за счет продления.

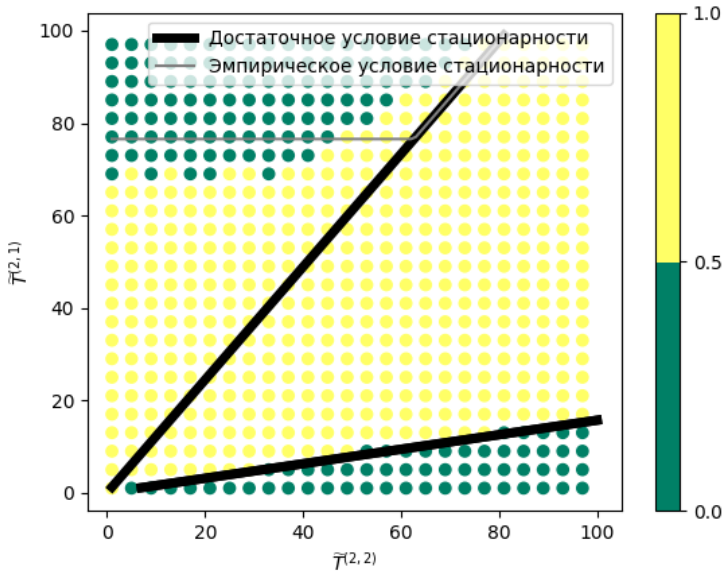


Рис. 4. Область стационарности системы. $\lambda_3 = 0,1$, $L = 10$

Более детально результаты эксперимента представлены на рис. 5. На этом рисунке каждому эксперименту соответствует посчитанная оценка средневзвешенной длительности ожидания одного требования. Чем более темным является цвет точки, тем лучше. Кроме присутствовавших на предыдущем рисунке границ, здесь присутствуют линии равных загрузок для случая циклического управления (синий цвет) и для случая циклического управления с продлением (голубой цвет). В работах [15] и [16] было отмечено, что оптимальные значения параметров с точки зрения средневзвешенного времени пребывания находятся вблизи ломаной равных квазизагрузок. При условии отсутствия продления ($T^{(2,3)} = 0$) под нагрузкой системы, например, по потоку Π_1 , естественно понимать величину

$$(10) \quad \frac{(T^{(2,1)} + T^{(2,2)})\lambda_1 \sum_{\nu \geq 1} \nu p_\nu^{(1)}}{[\mu_2 T^{(2,2)}]}.$$

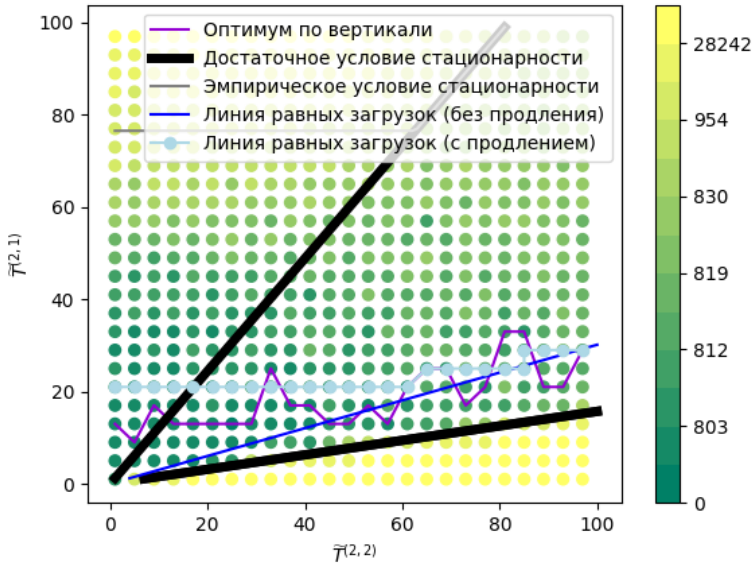


Рис. 5. Графики равных квазизагрузок

Тогда ломаную равных квазизагрузок определим из условия равенства загрузки системы по потокам Π_1 и Π_3 :

$$(11) \quad \frac{(T^{(2,1)} + T^{(2,2)})\lambda_1 \sum_{\nu \geq 1} \nu p_{\nu}^{(1)}}{[\mu_2 T^{(2,2)}]} = \frac{(T^{(2,1)} + T^{(2,2)})\lambda_3 \sum_{\nu \geq 1} \nu p_{\nu}^{(3)}}{[\mu_3 T^{(2,1)}]}$$

График этой кривой изображен на рис. 5 синим цветом.

Далее встает вопрос о том, что считать загрузкой системы в случае отсутствия продления по низкоприоритетному потоку Π_3 . В данной работе под загрузкой будем понимать отношение общего числа пришедших требований по потоку (Π_1 или Π_3) к общему числу обслуженных требований по этому потоку. Аналитически посчитать эти величины сложно, поэтому на графике представлена кривая равных загрузок, посчитанная на основе экспериментальных данных. Как видно из рисунка, такая кривая лучше «следует» за оптимальными значениями параметров,

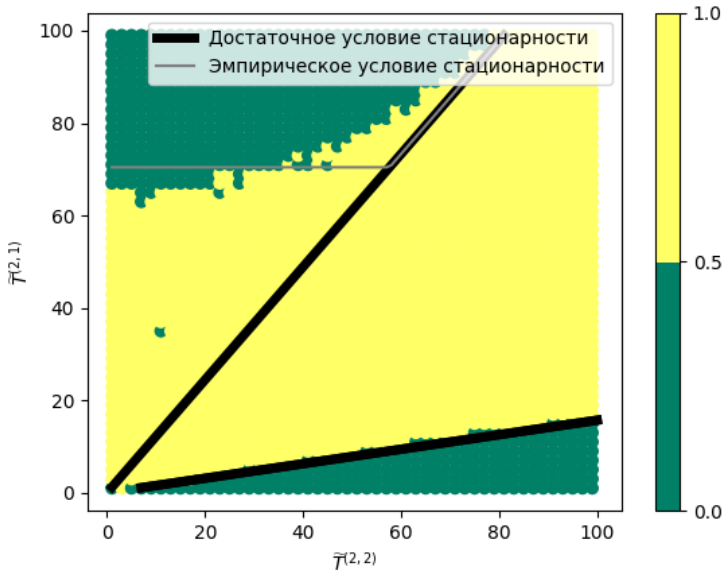


Рис. 6. Область стационарности для $\lambda_1 = 0,1$

нежели кривая равных квазизагрузок для циклического алгоритма.

Поясним, что значит «кривая равных квазизагрузок лучше «следует» за оптимальными значениями параметров». Поставим задачу: при фиксированном значении времени обслуживания потока Π_2 (величина $T^{(2,2)}$ на рис. 5) найти такое значение времени обслуживания потока Π_3 (величина $T^{(2,1)}$ на рис. 5), при котором достигается минимум средневзвешенного времени пребывания требования в системе. Фиолетовая линия на рис. 5 демонстрирует динамику этих значений при изменении времен $T^{(2,2)}$. Видно, что «в среднем» голубая линия лучше аппроксимирует фиолетовую кривую, чем синяя. Особенно в окрестности прямой $T^{(2,2)} = 0$.

Завершая анализ экспериментальных данных, отметим следующие наблюдения.

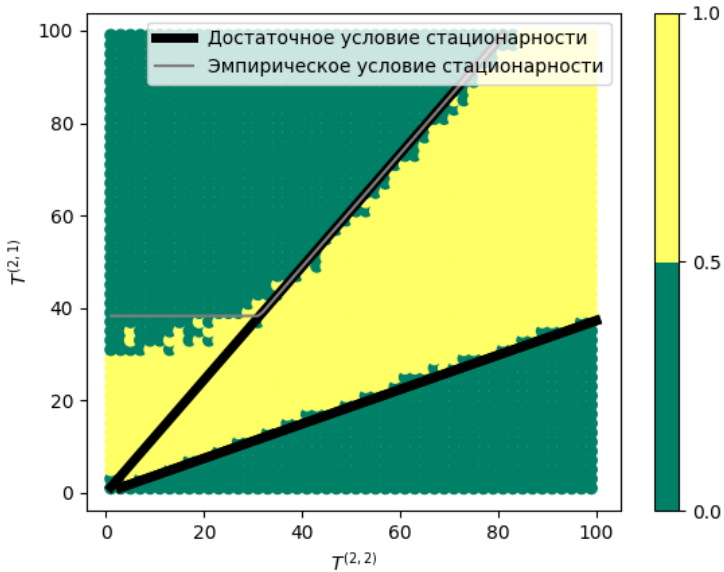


Рис. 7. Область стационарности для $\lambda_1 = 0.2$ (справа)

- При увеличении интенсивности потока Π_2 (или, что то же самое, интенсивности потока Π_1) область стационарности сужается (см. Рис. 6, 7).
- С увеличением порога L продления область стационарности увеличивается.

4. Заключение

На основе единого кибернетического подхода удалось построить строгую математическую и эффективную имитационную модели для сложной стохастической системы. Благодаря нелокальному описанию программная реализация имитационной модели оказалась проще в создании и производительнее по памяти и процессорному времени. Это позволило провести большое число экспериментов и получить более точные оценки целевых

характеристик системы. При помощи имитационной модели удалось подтвердить достаточные условия стационарности системы, полученные теоретически. Далее удалось расширить известную область стационарности путем проведения численных экспериментов с использованием алгоритма определения момента наступления стационарного режима в имитационной модели. Анализ кривых равных загрузок для циклического и нециклического (с продлением) случаев показал, что область оптимальных параметров лежит между этими кривыми. Однако найти точное взаимное расположение кривых равных квазизагрузок и оптимального набора параметров не удалось.

Литература

1. БРОЙЕР Л., ДУДИН А.Н., КЛИМЕНОК В.И., ЦАРЕНКОВ Г.В. *Двухфазная система $VMAP|G|1|N \rightarrow \rightarrow PH|1|M - 1$ с блокировкой* // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 1. — С. 117–130.
2. БУСЛЕНКО Н.П. *Моделирование сложных систем.* — М.: «Наука», 1978. — 399 с.
3. ЗОРИН А.В. *Кибернетический подход к построению и анализу математической модели тандема двух перекрестков* // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVI Международной конференции (Нижний Новгород, 20–25 июня 2011 г.). — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2011. — С. 179–183.
4. ЗОРИН А.В. *Устойчивость тандема систем обслуживания с бернуллиевским немгновенным перемещением требований* // Теория вероятностей и математическая статистика. — 2011. — Вып. 84 — С. 163–176.
5. КЛИМЕНОК В.И., САВКО Р.Ч. *Двухфазная система с вторными попытками и нетерпеливостью запросов* // Автоматика и телемеханика. — 2015. — №8. — С. 78–93.

6. КЛИМЕНОК В.И., ТАРАМИН О.С. *Двухфазная система обслуживания с групповым марковским потоком и повторными вызовами* // Автоматика и телемеханика — 2010. — №1. — С. 3–17.
7. КЛИМЕНОК В.И., ТАРАМИН О.С. *Двухфазная система $GI/PN/1 \rightarrow /PN/1/0GI/PN/1 \rightarrow /PN/1/0$ с потерями* // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 5. — С. 113–126.
8. КОЧЕГАНОВ В.М., ЗОРИН А.В. *Анализ потоков первичных требований в тандеме при циклическом управлении с продлением* // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2017): Материалы XVI Международной конференции им. А.Ф. Терпугова (29 сентября – 3 октября 2017 г.). — Томск: Изд-во НТЛ, 2017. — Ч. 1. — С.81–87.
9. КОЧЕГАНОВ В.М., ЗОРИН А.В. *Вероятностная модель тандема систем массового обслуживания с циклическим управлением с продлением* // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: материалы Междунар. науч. конф., посвящ. 80-летию проф., д-ра физ.-мат. наук Г.А. Медведева, Минск, 23–26 февр. — 2015. — С. 94–99.
10. КОЧЕГАНОВ В.М., ЗОРИН А.В. *Дискретная модель колебания длины низкоприоритетной очереди в тандеме систем массового обслуживания при циклическом алгоритме с продлением* // Дискретные модели в теории управляющих систем: IX Международная конференция, Москва и Подмоскowie, 20–22 мая 2015 г. — С. 126–129.
11. КОЧЕГАНОВ В.М., ЗОРИН А.В. *Достаточное условие существования стационарного режима низкоприоритетной очереди в тандеме систем массового обслуживания* // Вестник Волжской государственной академии водного транспорта. — 2017. — Вып. 50. — С. 47–55.

12. КОЧЕГАНОВ В.М., ЗОРИН А.В. *Достаточное условие существования стационарного режима очередей первичных требований в тандеме систем массового обслуживания* // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. — 2018. — № 2. — С. 49–74.
13. КОЧЕГАНОВ В.М., ЗОРИН А.В. *Изучение процесса управления потоками первичных требований в тандеме систем обслуживания с циклическим алгоритмом с продлением* // Проблемы теоретической кибернетики: Материалы XVIII международной конференции (Пенза, 19–23 июня 2017 г.) / Под ред. Ю.И. Журавлева. — М.: МАКС Пресс, 2017. — С. 135–137.
14. ФЕДОТКИН А.М. *Моделирование и оптимизация выходных процессов при циклическом управлении конфликтными потоками Гнеденко–Коваленко*: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. — Нижний Новгород, 2010. — 150 с.
15. ФЕДОТКИН М.А. *Анализ и оптимизация выходных процессов при циклическом управлении конфликтными транспортными потоками Гнеденко–Коваленко* // Автоматика и телемеханика. — 2009. — №12. — С. 92–108.
16. ФЕДОТКИН М.А., РАЧИНСКАЯ М.А. *Имитационная модель циклического управления конфликтными неординарными пуассоновскими потоками* // Вестник Волжской государственной академии водного транспорта. — 2016.— №47. — С. 43–51.
17. ASMUSSEN S., GLYNN, P.W. *Stochastic simulation: algorithms and analysis*. — New York: Springer, 2007. — 476 p.
18. BALSAMO S., PERSONE V.D.N., INVERARDI P. *A review on queueing network models with finite capacity queues for software architectures performance prediction* // Performance Evaluation. — 2003. — Vol. 51. — P. 269–288.
19. GNEDENKO B.W., KONIG D. *Handbuch der Bedienungstheorie*. — Berlin: Akademie-Verlag, 1983. — 519 p.

20. GOMEZ-CORRAL A. *A matrix-geometric approximation for tandem queues with blocking and repeated attempts* // Operations Research Letters. — 2002. — Vol. 30, Iss.6. — P. 360–374.
21. GOMEZ-CORRAL A. *A tandem queue with blocking and Markovian arrival process* // Queueing Systems. — 2002. — Vol. 41, Iss.4. — P. 343–370.
22. GOMEZ-CORRAL A. *On a tandem G-network with blocking* // Advances in Applied Probability. — 2002. — Vol. 34, Iss.3. — P. 626–661.
23. KLIMENOK V.I., BREUER L., TSARENKOV G.V., DUDIN A.N. *The BMAP/G/1/N \rightarrow PH/1/M system with losses* // Performance Evaluation. — 2005. — Vol. 60. — P. 17–40.
24. LAW A.M., KELTON W.D. *Simulation modeling and analysis*. — McGraw-Hill, 2005. — 760 p.
25. PERROS H.G. *Queueing networks with blocking: exact and approximate solutions*. — New York: Oxford University Press, 1994. — 288 p.
26. REICH E. *Waiting times when queues are in tandem* // The Annals of Mathematical Statistics. — 1957. — Vol. 28, No. 3. — P. 768–773.
27. ZORINE A.V. *Stability of a tandem of queueing systems with Bernoulli noninstantaneous transfer of customers* // Theor. Probability and Math. Statist. — 2012. — Vol. 84. — P. 173–188.
28. ZORINE A.V. *Stability of a tandem queueing system with delayed Bernoulli transition of customers* // Abstracts of international conference «Modern stochastics: theory and applications II» Dedicated to the anniversaries of prominent Ukrainian scientists: Anatolij Skorokhod, Volodymyr Korolyuk and Igor Kovalenko, Kyiv, Ukrain, September 7-11. — 2010. — P. 76.

STATISTICAL ANALYSIS AND OPTIMIZATION OF A TANDEM QUEUING SYSTEMS UNDER PROLONGABLE CYCLIC SERVICE

Andrei Zorine, N.I. Lobachevsky National Research State University of Nizhny Novgorod, Doctor of Science, assistant professor (andrei.zorine@itmm.unn.ru)

Victor Kocheganov, N.I. Lobachevsky National Research State University of Nizhny Novgorod, PhD student (kocheganov@gmail.com)

Abstract: Tandem of controlling systems under prolongable cyclic service is presented. There are high and low-priority input flows in each system. Customers of the first system are serviced in class of cyclic algorithms: high-priority customers are serviced fixed amount of time and low-priority customers are then serviced another fixed amount of time. After service high-priority customers of the first system are transferred to the second one. In the second system, customers are serviced in the class of cyclic algorithms with prolongations: in addition to cyclic service it is possible to prolong service of high-priority customers in case amount of low-priority customers is below predefined threshold. Due to cybernetic approach it had become possible to build mathematical model, define necessary random variables and elements with specific distribution, which form Markov chain and represent problem setting. Also it had become possible to construct simulation model to conduct statistical experiments. Paper proposed an algorithm for determining when a stationary mode is reached. Estimators for system performance characteristics are also discussed. Stationary mode existence domain is investigated by means of experiments. In so doing necessary conditions found by authors analytically are confirmed, and the possibility of their extension is demonstrated.

Keywords: cybernetic control system, simulation model, cyclic algorithm with prolongations, multidimensional denumerable discrete-time Markov chain.

УДК 519.248

ББК 22.18

DOI: 10.25728/ubs.2019.78.6

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии П.В. Пакушиным.*

Поступила в редакцию 05.12.2018.

Дата опубликования 31.03.2019.