ДВА ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ РАСШИРЕНИЯ МОЩНОСТИ ПРОИЗВОДСТВА НА РЫНКЕ ОЛИГОПОЛИИ

Акинфиев В. К.[1]
(ФГБУН *Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Производственная мощность компании является одним из определяющих факторов ее успеха в конкурентной борьбе, так как позволяет удовлетворить текущий и будущий рыночный спрос. В статье предлагается количественная модель для определения инвестиций в развитие производственных мощностей компаний на конкурентных олигополистических рынках на основе равновесия Нэша, сформулированная как проблема оптимизации. Рассматривается два типа рынка: рынок с эластичным спросом (рынок Курно) и рынок с неэластичным спросом. Второй тип рынка характерен для рынков сырьевых товаров (нефти, газа, металлургического угля и др.), которые находятся в начале производственной цепочки создания конечного продукта. В первом случае задача формулируется как совокупность взаимосвязанных квадратичных задач оптимизации. Для ее решения предложен метод сведения исходной задачи к решению смешенной задачи дополнительности (MCP). Во втором случае предложен метод решения задачи, основанный на совместном использовании многоагентного имитационного моделирования и анализа матричных игр. Разработана имитационная модель, которая учитывает взаимосвязь между инвестициями компаний (агентов) и динамикой рынка. Предложенный метод позволяет получить приближенное решение исходной задачи, так как при построении имитационной модели используются эвристические принципы и алгоритмы поведения агентов.

Ключевые слова: задача расширения производства, многоагентное моделирование, матричные игры.

1. Введение

Любая компания в процессе своей жизнедеятельности стремится повысить свою конкурентоспособность, долю рынка, стоимость и прибыльность своего бизнеса. Одним из основных способов достижение этих целей являются инвестиции в расширение и модернизацию производственных мощностей компании.

---

[1] *Валерий Константинович Акинфиев, д.т.н., в.н.с.* (*akinf.valery@yandex.ru*).

Традиционный подход к оценке эффективности и выбору инвестиционных решений компаний основан на методе моделирования и оценки дисконтированных денежных потоков (DCF). В этих моделях прогноз динамики цен и спроса на продукцию компаний являются экзогенными переменными. Следует отметить, что оценки эффективности вариантов инвестиционных стратегий существенным образом зависит от достоверности и обоснованности этих прогнозов. Как правило, компании решают две взаимосвязанные задачи: долгосрочную – развитие производственных мощностей и краткосрочную – определение объемов производства и поставок продукции на рынок [1].

Большинство рынков в современной экономике относятся к рынкам несовершенной конкуренции, где каждый производитель в состоянии существенно влиять на цену продукции. Наиболее интересным для исследования типом рыночных структур является олигополия. Предполагается, что компании принимают инвестиционные решения в условиях неопределенности и независимо друг от друга и их выбор влияет на соотношение спроса и предложения на рынке и, соответственно, на рыночную цену продукции. Каждая компания стремится выбрать такую инвестиционную стратегию, которая обеспечит ей максимальный выигрыш в соответствии с заданным критерием.

Следует отметить, что основным побудительным мотивом выбора компаниями той или иной инвестиционной стратегии является прогнозируемая динамика рыночного спроса на продукцию. При растущем рынке компании инвестируют, как правило, в развитие производственных мощностей и расширение производства. В противном случае более эффективной является инвестиционная стратегия, направленная на модернизацию существующего производства и сокращение производственных издержек. Как правило, компании используют обе этих стратегии одновременно [2].

Различным аспектам олигополистического поведения посвящено большое количество как зарубежной, так и российской литературы, включая исследование классических моделей (Курно, Бертран и др.). Как правило, в этих работах анализируются рыночные стратегий компаний, которые состоят либо в выборе объема производства (поставок продукции на рынок), либо в выборе цены поставки продукции. В этих работах мощность производства компании считается заданной и выступает в качестве ограничения на выбор объема производства.

Последние годы появились работы, в которых мощность производства также рассматривается в качестве управляемой переменной задачи. При этом приращение мощности производства, необходимое для производства оптимальных объемов предложения продукции на рынок, определяется выбором инвестиционных стратегий компании [6–8, 11]. Исследуемая в работе задача лежит в русле данного научного направления и развивает методы анализа рыночных стратегий компаний в области инвестиционных решений, направленных на повышение их конкурентных преимуществ (увеличение производственных мощностей и сокращения производственных издержек). Новизной рассматриваемой в работе задачи является также учет в модели особенностей рынка с неэластичным спросом, который характерен для добывающих отраслей промышленности.

Рассмотрим локальный рынок, на котором присутствует N компаний ($i = 1, \ldots, N$), производящих однородную продукцию. Прогнозный горизонт равен T периодам, $t = 1, \ldots, T$. Пусть $D(t)$ – рыночный спрос на продукцию, $P(t)$ – рыночная цена в период t, $S(t)$ – суммарное предложение (объем поставок продукции) со стороны компаний-производителей.

В работе рассматривается два типа рынка:

Рынок с эластичным спросом (рынок Курно).

Рыночная цена продукции описывается линейной обратной функцией спроса $P(t) = a - b \cdot S(t)$, где a и b являются константами. В данной модели предполагается, что спрос на продукцию со стороны потребителей $D(t)$ линейно зависит от ее рыночной цены, которая определяется предложением продукции со стороны компаний-производителей $S(t)$.

Рынок с неэластичным спросом.

Для данного типа рынка характерно, что спрос на продукцию $D(t)$ в краткосрочной перспективе не зависит от изменения ее рыночной цены и задается в модели экзогенно в виде некоторой наперед заданной функции времени $D(t)$ или набора таких функций (сценариев).

Таким свойством обладают рынки сырьевых товаров (нефти, газа, металлургического угля и др.), которые находятся в начале производственной цепочки создания конечного продукта. При этом рыночная цена, которая формируется, как правило, с использованием биржевых механизмов, зависит в каждый период t от баланса спроса и предложения.

В отличие от рынка с эластичным спросом, в каждый период времени рыночная цена формируется на основе соотношения спроса на продукцию $D(t)$ и суммарного предложения со стороны компаний $S(t)$. Тогда

$$(1)\quad P(t) = P(0)\left(1 + \gamma\,\frac{D(t) - S(t)}{D(t)}\right)$$

где $P(0)$ – цена на начало прогнозного периода; γ – эластичность цены по величине превышения спроса над предложением. Предполагается, что $D(t) = S(t)$. В случае если $D(t) - S(t) \geq 0$ (возникает дефицит предложения на рынке), то рыночная цена растет, в противном случае – избыток предложения и, соответственно, цена падает.

С учетом особенности данного типа рынка и прогноза динамики спроса $D(t)$ компании выбирает стратегии инвестиций в развитие производства, которые включает выбор в каждый период времени общего размера инвестиций, а также выбор направлений инвестирования. Последнее может включать выбор соотношения финансовых средств, направляемых на реализацию инвестиционных проектов двух типов:

– проектов развития производственных мощностей и расширения производства и, соответственно, увеличения предложения продукции на рынке;

– проектов, направленных на сокращение производственных издержек, которые не увеличивают предложение продукции на рынке, а влияют только на себестоимость и рентабельность ее производства.

В работе задача выбора стратегического поведения компаний на конкурентных рынках формулируется как совокупность взаимосвязанных нелинейных задач оптимизации. В зависимости от типа рынка рассмотрены и проанализированы два варианта задачи и предложены подходы к ее решению:

Рынок с эластичным спросом (рынок Курно). Использование методов точного и приближенного решения задач математического программирования с равновесными ограничениями (Mathematical Programs with Equilibrium Constraints (MPEC)) [9].

Рынок с неэластичным спросом. Совместное использование методов многоагентного имитационного моделирования и методов анализа матричных игр.

2. Постановка задачи для рынка с эластичным спросом

Далее предполагается, что выбор компаниями стратегий инвестиций в расширение своего производства сводится к решению некоторой задачу математического программирования. Рассмотрим постановку задачи для компании i.

Искомые переменные:

$x_i(t)$ – объем поставок (производство) продукции компанией i. Тогда суммарный объем поставок на рынок $S(t) = x_i(t) + x_{-i}(t)$, где $x_{-i}(t)$ – суммарный объем поставок другими компаниями. Производственные издержки компании i зависят от объем производства и поставок продукции и равны $c_i(t)\cdot x_i(t)$, где $c_i(t)$ – удельные производственные издержки.

Пусть рыночная цена продукции описывается линейной обратной функцией спроса, а именно $P(t) = a - b\cdot(x_i(t) + x_{-i}(t))$, где a и b являются константами.

Инвестиционная стратегия.

$y_i(t)$ – прирост производственной мощности компании i в период t, связанный с инвестициями в расширение производства. Тогда $I_i(t) = k_i\cdot y_i(t + \tau_i)$ – объем инвестиций в период t, необходимый для увеличения мощности производства, где τ_i – временной лаг между периодом инвестирования и периодом прироста мощности производства.

Здесь для простоты предполагается, что необходимый объем инвестиций и прирост мощности производства линейно зависят друг от друга.

Предположим, что компания стремится максимизировать свой суммарный чистый денежный поток за прогнозный период $t = 1, \ldots, T$, который равен чистой прибыли, полученной за этот период, за вычетом средств, направленных на инвестиции. Чтобы не усложнять формулировку задачи, мы сознательно не будем учитывать фактор дисконтирования денежного потока. Хотя это легко сделать, добавив в выражение (2) в качестве множителя коэффициент дисконтирования $k_d = \frac{1}{(1+d)^t}$, где d – заданная ставка дисконтирования. Задача выбора искомых переменных стратегического поведения компании i сводится к поиску решения следующей задачи оптимизации:

$$(2)\quad \max_{x_i(t), y_i(t)} \sum_{t=1}^{T} ((a - b \cdot (x_i(t) + x_{-i}(t)) \cdot x_i(t) - c_i(t) \cdot x_i(t) - k_i \cdot y_i(t + \tau_i),$$

$$(3)\quad x_i(t) \le C_i(0) + \sum_{t=1}^{t} y_i(t) \qquad \forall t,$$

$$(4)\quad y_i(t) \le y_i^{max}(t) \qquad \forall t,$$

$$(5)\quad x_i(t) \ge 0,\ y_i(t) \ge 0 \qquad \forall t,$$

где $C_i(t)$ – мощность производства на начало прогнозного периода. Неравенство (3) задает технологическое ограничение на объем поставки (производства) продукции, а неравенство (4) – на прирост мощности производства. Здесь $y_i^{max}(t)$ – максимально возможный прирост мощности производства в период t. Заметим, что, как правило, $y_i^{max}(t)$ зависит также и от наличия финансовых ресурсов у компании, которое, в свою очередь, определяется величиной накопленного денежного потока компании к периоду t. При этом должно выполняться следующее условие:

$$(6)\quad \begin{aligned} y_i(t+\tau) \le \frac{1}{k_i} \sum_{t=1}^{t} (a - b(t) \cdot (x_i(t) + x_{-i}(t)) \cdot x_i(t) - \\ - c_i(t) \cdot x_i(t) - \sum_{t=1}^{t-1} k_i \cdot y_i(t + \tau_i). \end{aligned}$$

Выполнение неравенства (6) гарантирует финансовую реализуемость инвестиционной стратегии компании, т.е. все необходимые инвестиции для принятой стратегии расширения производства будут профинансированы компанией из накопленных собственных денежных средств. Компании для финансирования выбранной инвестиционной стратегии могут также использовать разнообразные долговые инструменты. Однако учет в постановке задачи этих возможностей существенно бы усложнило задачу.

Совместное решение задач (2)–(6) для всех компаний $i = 1, \ldots, N$ сводится к выбору искомых переменных $x_i(t)$ и $x_{-i}(t)$, удовлетворяющих некоторым условиям равновесия. Для поиска рыночного равновесия принято использовать концепцию равновесия Нэша. Решение называется равновесным, если ни одна из компаний не может увеличить выигрыш (2), изменив свое решение в одностороннем порядке, не вызвав при этом реакцию других игроков.

Пусть X_i – вектор, который включает все искомые переменные задачи (2)–(6) для компании i. Обозначим целевую функцию (2) через $U_i(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_N)$. Тогда $(X_1^*, \ldots, X_N^*)$ является равновесной точкой Нэша, если для всех i выполняется неравенство $U_i(X_1^*, \ldots, X_i^*, \ldots, X_N^*) \geq U_i(X_1^*, \ldots, X_i, \ldots, X_N^*)$. Проблема поиск равновесных точек Нэша в такой постановке сводится к совместному решению совокупности нелинейных задач оптимизации (2)–(6) которая относится к классу задач математического программирования с равновесными ограничениями (MPEC)) [9]. Существует два основных подхода к решению задач данного типа. Первый из них состоит в сведении исходной задачи оптимизации к решению смешенной задачи дополнительности (MCP). Второй подход состоит в сведении задачи к решению системы вариационных неравенств [9]. Отметим, что оба этих подхода взаимозависимы и дополняют друг друга.

В общем случае задачи данного типа являются довольно сложными, для них не существует хороших методов решения. Методы решения хорошо разработаны в основном для случая задач выпуклого программирования. Рассмотрим применение первого подхода к решению задачи (2)–(5).

3. Сведение к задаче MCP

Задача (2)–(5) для каждого агента i представляет собой квадратичную задачу оптимизации относительно переменных $x_i(t)$ и линейную относительно переменных y_i. Вместо прямого использования целевой функции (2) в данном случае используется метод сведения задачи к MCP, которая состоит из условий первого порядка для максимизации суммарного денежного потока каждой компании. В соответствии с [9] любое решение указанной выше задачи оптимизации должно удовлетворять условиям Каруша – Куна – Таккера (ККТ), записанным для каждой переменной. Назовем условия ККТ для переменных $x_i(t)$ краткосрочными, а для переменных y_i – долгосрочными. В искомой точке равновесия Нэша все условия ККТ должны выполняться одновременно. В данном случае существование и единственность решения гарантируется благодаря выпуклости целевых функций и ограничений задачи. Таким образом, полученные ККТ-условия необходимы и достаточны для существования решения. Запишем эти условия.

Краткосрочные условия ККТ должны выполняться для всех i, t:

$$0 \le c_i - \big(a - b\cdot(x_i(t) + x_{-i}(t)\big) + \lambda_i(t) \perp x_i(t) \ge 0,$$

$$0 \le C_i\ (0) + y_i - x_i(t) \perp \lambda_i(t) \ge 0.$$

Долгосрочные условия ККТ должны выполняться для всех i:

$$0 \le k_i - \sum_{t\in T} \lambda_i(t) + \theta_i \perp y_i \ge 0,$$

$$0 \le y_i^{max} - y_i \perp \theta_i \ge 0,$$

где под записью $\perp$ понимается условие дополняющей нежёсткости, которое означает, что по крайней мере одно из неравенств в каждой строке условий ККТ должно быть выполнено как равенство, $\lambda_i(t)$ и θ_i являются множителями Лагранжа.

Чтобы решить исходную задачу (2)–(5), необходимо объединить все выписанные условия ККТ в одной MCP. Ее численное решение может быть получено, например, с использованием пакета PATH Solver, входящего в систему моделирования GAMS [5]. Алгоритмы решения задач в PATH Solver основаны на обобщении классического метода Ньютона и его модификациях.

Следует отметить, что данный подход к решению задач поиска рыночного равновесия в задаче расширения производства оказался весьма плодотворным и породил разработку разнообразных новых методов и их применения к решению ряда прикладных задач [6–8].

Как правило, подобные задачи не является выпуклыми, и поэтому стандартные методы решения задачи в форме MPEC не гарантируют нахождение точного решения. В этом случае часто приходится использовать приближенные методы. Один из них сводится к процедурам поиска равновесия на дискретном множестве инвестиционных решений компаний. Применение сеточных методов поиска упрощает решение последовательности задач MCP. Другой метод решения основан на переформулировании задачи MPEC в виде смешанной целочисленной задачи линейного программирования (MILP), которая может быть решена существующими пакетами оптимизации [6, 11].

В целом следует отметить, что постановка задачи расширения производства на конкурентных рынках в виде MPEC подразумевает ряд предположений, которые могут искажать реальную картину поведения компаний на рынке. Прежде всего предполагается что все компании обладают полной информацией о будущих рыночных событиях, таких как возможные инвестиционные затраты и издержки производства других игроков и рыночный спрос на их продукцию.

Кроме того, предполагается, что игроки обладают идеальной дальновидностью. Они могут предвидеть рыночные шоки, такие как срыв поставок или неожиданное падение спроса. Еще одним важным фактором является использование модели рыночного спроса. Так, например, моделирование олигополии Курно требует линейной модели функции спроса, что, как будет показано далее, не всегда соответствует реальным рынкам.

4. Рынок с неэластичным спросом.

Рассмотрим модификацию задачи (2)–(6) в условиях рынка с неэластичным спросом. Перепишем формулу (1) в виде

$P(t) = a - b(t) \cdot S(t),$

где $a = P(0) \cdot (1+\gamma)$ и $b(t) = \gamma \cdot \frac{P(0)}{D(t)}$.

Заметим, что в отличие от стандартной обратной функции спроса, используемой в разделе 2, коэффициент $b(t)$ является функцией времени, которая зависит от заданной динамики изменения спроса $D(t)$. Напомним, что $D(t)$ не зависит от цены.

Пусть, как и в задаче (2)–(6), $x_i(t)$ – объем поставок (производство) товара, $c_i(t)$ – удельные производственные издержки, которые в модели могут зависеть от активных действий агентов. Тогда задача выбора искомых параметров стратегического поведения агентов сводится к поиску решения следующей задачи оптимизации:

(7) $$\max_{x_i(t), y_i(t)} \sum_{t=1}^{T} ((a - b(t) \cdot (x_i(t) + x_{-i}(t)) \cdot x_i(t) - c_i(t) \cdot x_i(t) - k_i \cdot y_i,$$

(8) $$x_i(t) \le C_i(0) + y_i, \quad t = \overline{1,T},$$

(9) $$y_i \le y_i^{max},$$

(10) $$y_i(t+\tau) \le \frac{1}{k_i} \sum_{t=1}^{t} (a - b(t) \cdot (x_i(t) + x_{-i}(t)) \cdot x_i(t) - \\ - c_i(t) \cdot x_i(t) - \sum_{t=1}^{t-1} k_i \cdot y_i(t+\tau_i),$$

(11) $$x_i(t) \ge 0, \quad y_i \ge 0.$$

Далее рассмотрим расширение задачи (7)–(11) на случай, когда компания инвестирует не только в проекты увеличения мощности производства, но и в проекты его модернизации, которые позволяют снизить производственные издержки.

Пусть $z_i(t)$ – сокращение удельных производственных издержек в период t за счет инвестиций в модернизацию производства ($z_i(t) \ge 0$). Тогда $c_i(t) = c_i(0) - \sum_{t=1}^{t} z_i(t)$, где $c_i(0)$ – начальные удельные производственные издержки. При этом объем инвестиций, необходимый для сокращения удельных производственных издержек, равен $I_i^*(t) = k_i^* \cdot z_i(t + \tau_i^*)$, где τ_i^* – временной лаг.

Оптимизируемая функция в задаче (7)–(11) будет зависеть уже от выбора трех переменных. Запишем ее следующим образом:

$$(12)\quad \max_{x_i(t), y_i(t), z_i(t)} \sum_{t=1}^{T} (a - b(t) \cdot (x_i(t) + x_{-i}(t)) \cdot x_i(t) - \\ - c_i(z_i(t)) \cdot x_i(t) - k_i \cdot y_i(t + \tau_i) - k_i^* \cdot z_i(t + \tau_i^*).$$

При этом ограничение (10) будет иметь следующий вид:

$$(13)\quad y_i(t + \tau) \le \frac{1}{k_i} \sum_{t=1}^{t} (a - b(t) \cdot (x_i(t) + x_{-i}(t)) \cdot x_i(t) - \\ c_i(z_i(t)) \cdot x_i(t) - \sum_{t=1}^{t-1} k_i \cdot y_i(t + \tau_i) - \sum_{t=1}^{t-1} k_i^* \cdot z_i(t + \tau_i).$$

Совместное решение задач (7)–(13) для всех компаний $i = 1, \ldots, N$ сводится к выбору искомых переменных $x_i(t)$, $y_i(t)$ и $z_i(t)$, удовлетворяющих некоторым условиям равновесия. Как видно из соотношений (7)–(13) задача расширения производства для рынка с неэластичным спросом содержит существенные нелинейности, и ее решение не удается свести к методам, используемым в разделе 3.

Рассмотрим подход к решению задачи (7)–(13), основанный на методологии многоагентного имитационного моделирования. Модели данного типа позволяют описывать динамику систем посредством имитации поведения ее компонентов – агентов. Агенты взаимодействуют между собой, пользуясь ограниченным набором правил, которые определяют их индивидуальное поведение. Глобальное поведение возникает как результат деятельности многих агентов.

Данный подход к моделированию предполагает задание:

– начального состояния системы.

– атрибуции агентов, которая включает: задание информации доступной агенту в процессе принятия решений, а также задание моделей поведения агентов (алгоритмов принятия решений) на основе этой информации.

Различают простые и сложные модели поведения агентов. Простые модели поведения агентов включают, как правило, «жесткие» алгоритмы принятия решений в зависимости от информации о внешней среде, поступающей агенту. Сложные модели могут включать алгоритмы адаптации, искусственного интеллекта, а также алгоритмы прогнозирования состояния внешней среды.

Задача рассматривается в условиях неопределенности динамики спроса на продукцию $D(t)$, производимую агентами. Агенты инвестируют в развитие производства, что увеличивает предложение товара на рынке и, в зависимости от динамики спроса, приводит к увеличению или к уменьшению рыночной цены товара. Предлагаемый подход к моделированию конкуренции основан на учете взаимосвязи между инвестиционной активностью агентов, которая может дополнительно провоцировать нестабильность рынков, и динамикой рынков, которая определяет выбором агентами своих инвестиционных стратегий. Излишняя инвестиционная активность агентов, как правило, приводит к появлению «лишних» производственных мощностей и, в периоды снижения спроса, к значительному снижению цены на продукцию [2].

Метод решения задачи сводится к совместному использованию при моделировании моделей поведения агентов и модели рынка (рис 1). Модель агента i представляет собой сочетание модели выбора инвестиционных решений в зависимости от прогноза динамики спроса и предложения на рынке и производственно-финансовой модели, которая позволяет оценить финансовые результаты тех или иных вариантов его инвестиционных решений.

Опишем простой алгоритм поведения агентов. Предположим, что агенты в каждом периоде t выбирают свои инвестиционные решения в соответствии с некоторым алгоритмом на основе анализа информации, поступающей с рынка, в том числе динамики рыночной цены, спроса и объема продаж [2]. Модель поведения агентов задается с помощью некоторого итеративного алгоритма вычисления искомых переменных задачи (7)–(13) на основе наблюдения на каждой итерации за динамикой рыночных параметров.

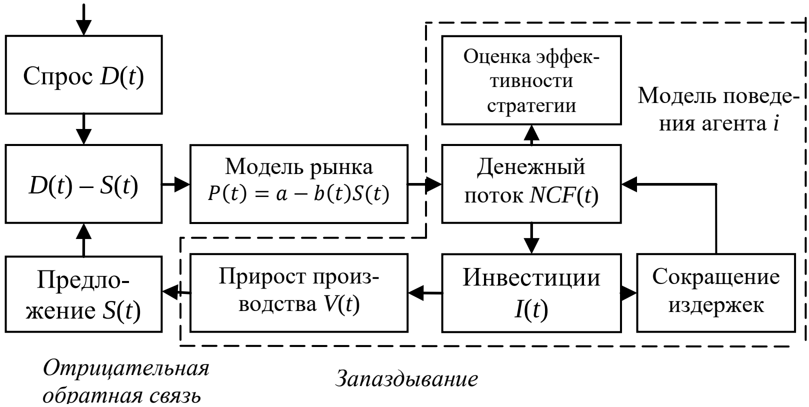

Рис 1. Схема моделирования

Идея предлагаемого метода решения задачи (7)–(13) состоит в замене искомых переменных $x_i(t)$, $y_i(t)$ и $z_i(t)$ на переменную $\alpha_i(t)$ – параметр инвестиционной активности агента, $0 \le \alpha_i(t) \le 1$. И далее $x_i(t)$, $y_i(t)$ и $z_i(t)$ определяются на основе выбора $\alpha_i(t)$ и некоторых «рациональных» правил принятия агентами инвестиционных решений. Равновесные точки в задаче ищутся в пространстве переменных $\alpha_i(t)$. Заметим, что множество возможных инвестиционных стратегий каждой компании совпадает с множеством точек единичного n-мерного куба в R_+^n. Поскольку параметр «инвестиционная активность» носит в некотором смысле качественный характер, то мы можем приписать этой переменной ряд нечисловых значений, например, высокая, средняя, низкая и пр. [2]. Чем больше величина α_i, тем выше ее инвестиционная активность. Поэтому, без потери общности, можно рассматривать в данной задаче конечный набор стратегий.

Пусть далее, если в период t $P(t) - P(t-1) > 0$ или $x_i(t) - x_i(t-1) > 0$ (что сигнализирует компании о повышательном тренде на рынке), то часть накопленного к периоду t чистого денежного потока компании (7) в доле, равной величине $\alpha_i(t)$, может быть направлено на инвестиции в ее развития $I_i^*(t)$, $I_i^*(t) = \alpha_i(t) \cdot \sum_{t=1}^{t-1} NCF_i(t)$.

Как было отмечено ранее, общий объем инвестиций агента может быть направлен в проекты двух типов: проекты, направленные на расширение производства – $I_i^1(t)$, и проекты, направленные на сокращение издержек – $I_i^2(t)$, в некотором соотношении $\alpha_i^1(t)$ и $\alpha_i^2(t)$, ($\alpha_i^2(t) = 1 - \alpha_i^1(t)$). Величины $\alpha^1(t)$, $\alpha_i^1(t)$ и $\alpha_i^2(t)$ являются искомыми параметрами, которые могут выбирать агенты в зависимости от их прогноза динамики рынка.

Выбор инвестиций в расширение производства. Алгоритм выбора инвестиционных решений в расширение производства состоит в следующем. Если в период t наблюдается восходящий тренд на рынке, то компания инвестирует в проекты расширения производства следующим образом:

$$I_i^1(t) = \min\{\alpha_i^1(t) \cdot \sum_{t=1}^{t} NCF_i(t), I_i^{max}\},$$

где I_i^{max} – предельный за период уровень инвестиций. Если наблюдается нисходящий тренд на рынке, то в этом периоде $I_i^1(t) = 0$. Тогда $y_i(t) = k_i^1 \cdot I_i^1(t - \tau_i^1)$, где k_i^1 характеризует прирост производственных мощностей на единицу инвестиционных вложений, τ_i^1 – временной лаг. Соответственно, производственная мощность агента рассчитывается с помощью рекуррентного соотношения $C_i(t) = C_i(t-1) + y_i(t)$, $t = \overline{1,T}$.

Выбор инвестиций в сокращения издержек. Пусть $z_i(t)$ – искомое сокращение себестоимости продукции и $z_i(t) = k_i^2(t) \cdot I_i^2(t - \tau_i^2)$, где $k_i^2(t)$ – удельная эффективность инвестиций, τ_i^2 – временной лаг. Себестоимость продукции агента в период t рассчитывается по следующей формуле:

$$c_i(t) = c_i(0) - \sum_{t=1}^{t} z_i(t) \text{ и } c_i(t) = c_i(t-1) - k_i^2(t) \cdot I_i^2(t - \tau_2).$$

В расчетах используется модель «снижающейся эффективности инвестиций». В соответствии с этой моделью $k_i^2(t)$ снижается при приближении $c_i(t)$ к некому пороговому значению. При этом $k_i^2(t)=k_i^2(0)\cdot\left(1-\frac{c_i(0)-c_i(t)}{c_i^{\text{пр}}}\right)$, где $c_i^{\text{пр}}$ – оценка предельно возможного сокращения себестоимости продукции, при достижении которого эффективность инвестиций становится равной нулю.

Агенты инвестирует в проекты сокращения издержек в соответствии со следующим алгоритмом:
$I_i^2(t)=\min\left\{(1-\alpha_i^1)\cdot\frac{k_i^2(t)}{k_i^2(0)}\cdot I_i^*(t), I_i^{\text{пр}}\right\}$, где $I_i^{\text{пр}}$ – предельно допустимый за период уровень инвестиций.

Выбор поставок продукции. Пусть, как и прежде, $x_i(t)$ – объем поставок (производство) продукции агентом i. Тогда суммарный объем поставок $S(t)=\sum_{i=1}^{N}x_i(t)$. $C(t)$ – суммарная мощность производства агентов, которая определяет потенциальное предложение товара на рынок.

Если спрос не эластичен, то нельзя поставить продукции больше, чем требуется рынку. Поэтому $S(t)=\min\{D(t); C(t)\}$. Если $D(t)\ge C(t)$, то агенты полностью загружают свои мощности и $x_i(t)=C_i(t)$. Если $D(t)\le C(t)$, то агенты загружают свои мощности не полностью и $x_i(t)=S(t)\frac{C_i(t)}{C(t)}$. Здесь предполагается, что загрузка мощностей для всех агентов одинакова.

Тогда

$$x_i(t)=\min\left\{D(t);\sum_{i=1}^{N}(C_i(0)+\sum_{t=1}^{t}y_i(t))\right\}\cdot\frac{C_i(0)+\sum_{t=1}^{t}y_i(t)}{\sum_{i=1}^{N}(C_i(0)+\sum_{t=1}^{t}y_i(t))}.$$

Приведенный алгоритм позволяет, варьируя переменные $\alpha_i(t)$, определить $x_i(t)$, $y_i(t)$, $z_i(t)$ и на их основе рассчитать значения целевой функции (7) каждого агента. Заметим, что в таком подходе не требуется свойств непрерывности, компактности и выпуклости задачи и в расчетах могут быть использованы любые логические и нелинейные соотношения. Далее, исходная задача сводится к поиску решения матричной игры с ненулевой суммой, в которой матрица выигрышей агентов формируется на основе проведения серии расчетов.

Рассмотрим для простоты рынок, на котором представлены две компании. Пусть множество инвестиционных стратегий компании 1 ($k = 1, \dots, K$) и компании 2 ($j = 1, \dots, J$). По результатам проведения серии расчетов на модели можно построить матрицы выигрышей компаний $NPV_{k,i}{}^1$, $NPV_{k,i}{}^2$. В данной постановке решение задачи сводится к анализу биматричной игры с платежными матрицами $NPV_{k,i}{}^1$, $NPV_{k,i}{}^2$. Даная задача достаточно хорошо исследована. Как известно, условием существования хотя бы одной равновесной точки Нэша в чистых стратегиях (k_0, j_0) является выполнение следующих неравенств:

$$NPV^1_{k_0 j_0} \geq NPV^1_{k j_0}, k = \overline{1, K};$$

$$NPV^2_{k_0 j_0} \geq NPV^2_{k_0 j}, j = \overline{1, J}.$$

Если такая точка существует, то она считается решением данной задачи. Возможность получения решения (равновесной точки Нэша) биматричной игры в чистых стратегиях в общем случае не гарантировано и зависит от свойств матрицы $NPV_{k,i}{}^1$, $NPV_{k,i}{}^2$. Метод решения данной задачи включает проведение численных расчетов на имитационной модели, построение платежной матрицы, ее анализ и поиск решения.

Если предположить, что агенты на протяжении прогнозного периода могут менять свои инвестиционные стратегии, т.е., например, до некоторого периода времени придерживаются «агрессивной» инвестиционной политики, а затем сокращают объем инвестиций и постепенно «сворачивают бизнес», то множество возможных инвестиционных стратегий каждого агента существенно возрастает. Рассмотрим в качестве набора возможных вариантов инвестиционных стратегий агента 1 множество путей на многодольном графе, где K – число вершин в каждой доле; n – число долей графа (число периодов изменения инвестиционных стратегий агентов). Соответственно, для агента 2 многодольный граф содержит в каждой доле J вершин. В таком случае задача может быть сведена к поиску равновесных точек биматричной игры, в которой размерность матриц выигрышей агентов будет равна $K^n \times J^n$. Алгоритм решения задачи состоит в следующем. Последовательно генерируются комбинации инвестиционных стратегий (путей на многодольных графах). Для каждой комбинации проводится моделирование и расчет критерия оптимальности инвестиционной стратегии и формируются матрицы выигрышей агентов. Далее стандартным методом осуществляется анализ и поиск равновесных точек Нэша, которые и являются искомым решением задачи.

Предложенный подход успешно использован для решения ряда практических задач, в частности, задачи выбора инвестиционных стратегий металлургических компаний на рынке стального проката, а также задачи анализа стратегического поведения нефтяных компаний на глобальном рынке [2, 3].

В [3] приведены результаты практического использования предлагаемого подхода для моделирования конкуренции, анализа и выбора инвестиционных стратегий нефтяных компаний с традиционным и нетрадиционным способом добычи нефти. Расчеты показывают, что во многих случаях существуют решения исследуемой задачи (равновесные точки Нэша) в чистых стратегиях, анализ которых позволяет сделать ряд интересных для практики выводов. В частности, на основе проведенных в начале 2016 года расчетов на реальных данных глобального нефтяного рынка дан прогноз динамики нефтяных цен на среднесрочную перспективу, который с достаточной точностью совпадает с реальной динамикой нефтяного рынка за период 2016 г. – IV кв. 2018 г.

Следует отметить, что в последние годы появился интерес к разработке новых подходов и методов решения задач поиска равновесия, в частности применительно к решению полиматричных игр и игр с дискретным набором стратегий [4, 10]. Данные типы игр являются хорошим инструментом моделирования рыночного поведения игроков в рассматриваемой задаче расширения производства на конкурентном рынке.

В полиматричных играх взаимодействие между игроками задается графом, в котором каждая дуга, соединяющая две вершины, моделирует биматричную игру соответствующих игроков. Каждый игрок играет одновременно несколько биматричных игр с игроками, которые непосредственно связаны с ним дугами. Выигрыш игрока является функцией его выигрышей во всех биматричных играх. Следует заметить, что, несмотря на многочисленные теоретические работы, практические аспекты вычислительных методов поиска равновесий в полиматричных играх пока еще не достаточно разработаны, так как в общем случае они являются NP-полными. Кроме того, существование равновесных точек в таких играх является также проблемой. В этой связи появились работы, в которой изучаются понятия и методы поиска приближенных равновесий Нэша [4, 10].

5. Заключение

В работе рассмотрена задача выбора оптимальных инвестиционных стратегий компаний на олигополистическом рынке, включающая выбор инвестиций в приращение производственных мощностей компании, а также выбор инвестиций, направленных на модернизацию производства и сокращение производственных издержек. Задача формулируется как совокупность взаимосвязанных нелинейных задач оптимизации. В зависимости от типа рынка рассмотрены два варианта постановки задачи и предложены подходы к их решению.

Для рынка с эластичным спросом (рынок Курно) предлагается использовать методы точного или приближенного решения задач математического программирования с равновесными ограничениями (MPEC).

Для рынка с неэластичным спросом предложен подход, основанный на совместном использовании методов многоагентного имитационного моделирования и методов анализа матричных игр. Имитационная модель, используемая в данном подходе, учитывает взаимосвязи между инвестиционной активностью агентов, которая может дополнительно провоцировать нестабильность рынков, и динамикой рынков, которая определяется во многом выбором агентами своих инвестиционных стратегий. Предложенный метод позволяет получить приближенное решение исходной задачи, так как при построении модели используются эвристические принципы и алгоритмы поведения агентов. Дальнейшее развитие предложенного подхода предусматривает включение в имитационную модель более сложных моделей поведения агентов с использованием адаптивных алгоритмов, искусственного интеллекта и алгоритмов прогнозирования состояния внешней среды.

Литература

1. АКИНФИЕВ В.К. *Управление развитием интегрированных промышленных компаний: теория и практика.* – М.: ЛЕНАНД, 2011.
2. АКИНФИЕВ В.К. *Моделирование инвестиционных стратегий компаний в условиях неопределенности* // Управление большими системами. – 2016. – Вып. 61. – С. 136–167.
3. АКИНФИЕВ В.К. *Модель конкуренции между нефтедобывающими компаниями с традиционным и нетрадиционным способом добычи* // Управление большими системами. – 2017. – Вып. 67. – С. 52–80.
4. DELIGKAS A., FEARNLEY J., IGWE T., SAVANI R. *An empirical study on computing equilibria in polymatrix games* // Proc. Int. Conference on Autonomous Agents & Multiagent Systems. Singapore, 2016. – P. 186–195.
5. FERRIS M., MUNSON T.S. *Complementarity Problems in GAMS and the PATH Solver* // J. of Economic Dynamics and Control. – 2000. – Vol. 24, Iss. 2. – P. 165–188.
6. GABRIEL S.A., CONEJO A.J., FULLER J.D., HOBBS B.F., RUIZ C. *Complementarity Modeling in Energy Markets* // Int. Series in Operations Research & Management Science. – New York, USA: Springer, 2012. – P. 630

7. GERAS'KIN M.I., CHKHARTISHVILI A.G. *Game-Theoretic Models of an Oligopoly Market with Nonlinear Agent Cost Functions* // Autom. and Remote Control. – 2017. – Vol. 78, No. 9. – P. 1631–1650.
8. LORENCZIKA ST., MALISCHEK R., TRÜBY J. *Modeling Strategic Investment Decisions in Spatial Markets* // EWI Working Paper. – 2014. – No 14. – P. 20.
9. LUO Z.Q., PANG J.S., RALPH D. *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*. – Cambridge University Press, 1996.
10. SAGRATELLA S. *Computing all solutions of Nash equilibrium problems with discrete strategy sets* // SIAM J. on Optimization. – 2016. – Vol. 26, Iss. 4. – P. 2190–2218.
11. WOGRIN S., HOBBS B.F., RALPH D., CENTENO E., BARQUIN J. *Open versus closed loop capacity equilibria in electricity markets under perfect and oligopolistic competition* // Mathematical Programming. – 2013. – Vol. 140(2). – P. 295–322.

TWO APPROACHES TO DYNAMIC CAPACITY EXPANSION PROBLEM IN OLIGOPOLY

Valerij Akinfiev, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (akinf@ipu.ru).

Abstract: The productive capacity is determinant of a company's success once it allows meeting the current and future demand. This article proposes quantitative models for determining investments in the development of the productive capacity in competitive oligopolistic markets, based on the Nash Equilibrium, formulated as an optimization problem. Two types of markets are considered: the market with elastic demand (Cournot market) and the market with inelastic demand. The second type of market is characteristic of commodity markets (oil, gas, metallurgical coal, etc.), which are located at the beginning of the production chain for the final product creation. In the first case, the problem is formulated as a set of interrelated quadratic optimization problems. To solve this problem, a method of converting the original problem to the mixed complementarity problem (MCP) is proposed. In the second case, methods based on multi-agent simulation and matrix games analyses are proposed. A simulation model of the company (agent) has been developed, which models the mutual influence of agents investment and market dynamics. The proposed method allows obtaining an approximate solution of the original problem, since the heuristic principles and algorithms of the behavior of agents are used in the construction of the model.

Keywords: capacity expansion problem multi-agent modeling, matrix games.

УДК 021.8 + 025.1
ББК 78.34

DOI: https://doi.org/10.25728/ubs.2019.79.3

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Р.М. Нижегородцевым.

*Поступила в редакцию 03.12.2018.
Опубликована 31.05.2019.*