ИЕРАРХИЯ МОДЕЛЕЙ БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ И ПОГРАНИЧНЫХ КОНФЛИКТОВ

Шумов В. В.[1]

(*Отделение погранологии Международной академии информатизации, Москва*)

Обсуждаются содержательные аспекты войн, сражений, военных и пограничных конфликтов и взгляды на них военных теоретиков. Выделено три уровня моделей. На нижнем уровне для моделирования боя подразделений используется вероятностная функция конфликта, основанная на определении боя (*совокупность согласованных по цели, месту и времени ударов, огня и маневра войск*)*, в которой учитываются численности боевых единиц сторон и параметр боевого превосходства. Его статистическая оценка найдена методом максимального правдоподобия. Боевое превосходство есть превосходство моральное* (*учитывается через проценты выдерживаемых сторонами кровавых потерь*) *и технологическое* (*превосходство в организации взаимодействия, в маневре, разведке и огневых возможностях*)*. Решена теоретико-игровая задача распределения ресурсов по объектам обороны. Модели среднего уровня являются расширениями классических уравнений боя Осипова–Ланчестера, учитывающих моральные потенциалы сторон с использованием основного закона психофизики. Результаты расчетов не противоречат положениям военной науки о боевой способности войск. В моделях верхнего уровня общественные издержки на ход и исход войн. В частности, проигрыш США во вьетнамской войне может быть объяснен неготовностью американского общества нести людские потери в войне с неясными целями.*

Ключевые слова: математическое моделирование, модели Осипова–Ланчестера, иерархия моделей, моральный фактор.

1. Введение

Систематическим изучением проблем подготовки и ведения военных и боевых действий занимается военная наука, под которой понимается «система знаний о стратегическом характере и закономерностях войны, строительстве и подготовке вооруженных сил и страны к войне и способах ведения вооруженной борьбы» [4, с. 90]. Разновидностью боевых действий являются пограничные конфликты – столкновения групп лиц

[1] *Владислав Вячеславович Шумов, к.т.н., доцент* (*vshum59@yandex.ru*).

или пограничных формирований сопредельных стран на государственной границе и ее нарушение. Нередко пограничные конфликты перерастают в серьезные военные столкновения [19].

Математические методы при планировании боя (сражения) и для изучения природы военных действий применяются с давних времен [6, 16]. В годы второй мировой войны возник научный метод «исследование операций», дающий в распоряжение военного командования или другого исполнительного органа количественные основания для принятия решений по действию войск или других организаций, находящихся под их управлением [12]. Классификация математических моделей военных действий представлена в работе Д.А. Новикова [13].

Составной частью исследования операций является теория игр – «математическая теория принятия решения в конфликтных ситуациях» [2, с. 5]. По Н.Н. Воробьеву теория игр, являясь теорией моделей принятия решений, «не занимается этими решениями как психологическими, волевыми актами; не занимается она и вопросами их фактической реализации» [17, с. 7]. Вместе с тем, с точки зрения военной науки, всякий бой кончается отказом от него одной из сражающихся сторон, т.е. является чисто психологическим актом [5, с. 182]. Н.Н. Головин отмечает: «Значение духовных свойств бойца всегда высоко оценивалось полководцами всех времен и народов. Привести имена тех, которые верили в их главенствующее значение, было бы равносильно составлению списка всем выдающимся военноначальникам» [5, с. 41]. По К. Клаузевицу войну можно понять и объяснить через триединство действий народа, армии и правительства в войне. Моральные величины на войне («таланты полководца, воинская доблесть армии, дух народа, комплектующего ее») занимают самое важное место [8] и подлежат учету в математических моделях боя.

В настоящей работе обсуждаются формальные модели, находящиеся «на стыке» исследования операций и военной науки (военной социологии и тактики). По масштабу участвующих в войне, бою, конфликте боевых и других единиц модели подразделяются на три уровня. На нижнем уровне моделируются действия небольших групп, на среднем – частей и соединений, на верхнем – вооруженных сил государства.

2. Модели боя на основе метода динамики средних

Одним из возможных способов (и исторически первым) описания процесса боевых действий многочисленных группировок является метод динамики средних. К достоинствам этого метода относятся простота, возможность учета многих факторов, наличие аналитических решений [3]. При построении моделей боя вводятся следующие допущения. Согласно закону больших чисел, количественные составы сохранившихся боевых единиц противоборствующих сторон в каждый момент времени близки к средним (математическим ожиданиям), что дает возможность не рассматривать подробности, связанные со случайным состоянием отдельно взятой боевой единицы (т.е. не записывать уравнения Колмогорова), и рассматривать процесс боевых действий как детерминированный. Последовательность выстрелов каждой боевой единицы представляется в виде пуассоновского потока событий.

Пусть имеются две стороны, участвующие в боевых действиях. Обозначим через $x(t)$ ($y(t)$) численность войск первой (второй) стороны в момент времени $t > 0$, численности в нулевой момент времени – x_0 и y_0 соответственно. Исключив из рассмотрения операционные потери (пропорциональные численности своих войск) и ввод (вывод) резервов, получим следующую систему дифференциальных уравнений (модель боя с переносом огня М. Осипова, 1915 [16]):

(1) $\frac{dx(t)}{dt} = -a_y y(t)$, $\frac{dy(t)}{dt} = -a_x x(t)$,

где a_x и a_y – коэффициенты эффективной скорострельности боевых единиц первой и второй стороны.

Аналитическим решением системы (1) является так называемая квадратичная модель боя:

(2) $a_y(y^2(t) - y_0^2) = a_x(x^2(t) - x_0^2)$.

Обычно проигравшей признается та сторона, чья численность войск первая обратится в ноль. Условие «равенства сил» имеет вид [13]

(3) $y_0 = x_0\sqrt{a_x / a_y}$.

Отметим некоторую условность выражений типа (3). Во-первых, уравнения (1) описывают динамику боя только на начальных его стадиях, когда средние численности сторон еще не малы по сравнению с их начальными численностями. Во-вторых, условие (3) не учитывает известного факта, что существует определенный критический процент потерь, при которых сторона отказывается от продолжения боя. Этот факт в военной науке называется боеспособностью войск, в военной статистике – моральным духом или выдерживаемым процентом «кровавых» потерь, в математическом моделировании – фактором Л.Н. Толстого [18].

В военной социологии показателем морального потенциала сражающихся войск является процент выдерживаемых ими «кровавых потерь» (потерь убитыми и раненными), при котором они еще способны вести боевые действия [5]. Обозначим через $0 < \lambda_x < 1$ ($0 < \lambda_y < 1$) показатель боевого духа первой (второй) стороны. Пусть $u(t)$ и $v(t)$ есть доли пораженных бойцов первой и второй стороны в момент времени t:

(4) $u(t) = \frac{x_0 - x(t)}{x_0}$, $v(t) = \frac{y_0 - y(t)}{y_0}$.

Участники боя делятся на три группы: 1) убитые и раненые в бою; 2) уклоняющиеся от ведения боя; 3) активно участвующие в бою. Способы уклонения от боя многообразны [5]. Полагая, что реакция бойцов на «кровавые потери» подчиняется основному закону психофизики в форме С. Стивенса [26], запишем вероятности отказа бойцов первой и второй стороны от ведения боя:

(5) $\pi_x(u(t)) = u(t)^A, \quad \pi_y(v(t)) = v(t)^B$

или (по определению медианы)

(6) $0{,}5 = (\lambda_x)^A, \quad 0{,}5 = (\lambda_y)^B$

(медианная схема оценки процентов выдерживаемых потерь выбрана в силу ее неманипулируемости [11]).

С точки зрения психофизики $u(t)$ и $v(t)$ являются стимулами, $\pi_x(u(t))$ и $\pi_y(v(t))$ – реакцией бойцов на кровавые потери, A и B – параметрами модальности.

Из выражения (6) находим:

(7) $A = \ln(0{,}5)/\ln(\lambda_x), \quad B = \ln(0{,}5)/\ln(\lambda_y)$.

По Н. Головину значения показателя моральной устойчивости войск меняются в пределах от 2–3 % до 50–60 %. Им соответствуют значения параметра модальности $A_1 = 0{,}18–0{,}2$ и $A_2 = 1–1{,}36$. При $\lambda_x = 0{,}5$ наблюдается линейная зависимость между стимулом (процентом кровавых потерь) и реакцией на него (активное участие в бою). При малых значениях λ_x прирост реакции бойцов существенно опережает прирост наблюдаемых ими потерь.

С учетом морального фактора вероятность активного участия бойцов $P_x(t)$ первой ($P_y(t)$ – второй) стороны в бою в момент времени t равна

(8) $P_x(t) = 1 - u(t)^A, \quad P_y(t) = 1 - v(t)^B$.

На рис. 1 при $\lambda_x = 0{,}4$ (первая сторона, сплошная линия) и $\lambda_y = 0{,}1$ (вторая сторона, пунктирная линия) показаны зависимости вероятностей активного участия в бою от доли пораженных участников.

Из рисунка видно, что вторая сторона с показателем морального духа (самопожертвования), равным 0,1, уже на начальных этапах боя имеет низкую долю сражающихся участников.

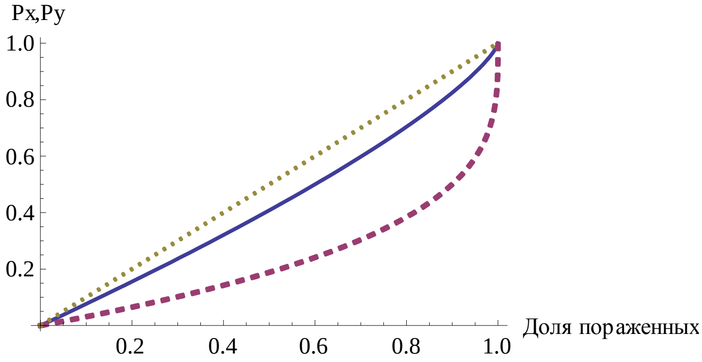

Рис. 1. Зависимость вероятности активного участия в бою от доли пораженных

Запишем систему уравнений динамики высокоорганизованного конфликта (модель боя с переносом огня), учитывающих психологические качества бойцов:

$$(9)\quad \frac{dx(t)}{dt} = -a_y y(t) P_y(t), \quad \frac{dy(t)}{dt} = -a_x x(t) P_x(t),$$

или

$$(10)\quad \frac{dx(t)}{dt} = -a_y y(t)\left(1-\left(\frac{y_0 - y(t)}{y_0}\right)^B\right),$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -a_x x(t)\left(1-\left(\frac{x_0 - x(t)}{x_0}\right)^A\right).$$

При исходных данных $a_x = a_y = 1$, $x_0 = 1000$, $y_0 = 1200$, $\lambda_x = 0{,}4$, $\lambda_y = 0{,}1$ на рис. 2 показана динамика боя (численное решение уравнений). Сплошная жирная линия – численность непораженных участников первой стороны. Горизонтальная сплошная линия – численность $(1 - \lambda_x)x_0$. Пунктирные линии характеризуют результат боя второй стороны.

Важным показателем являются доли активно участвующих в бою бойцов каждой стороны (рис. 3) в моменты времени t.

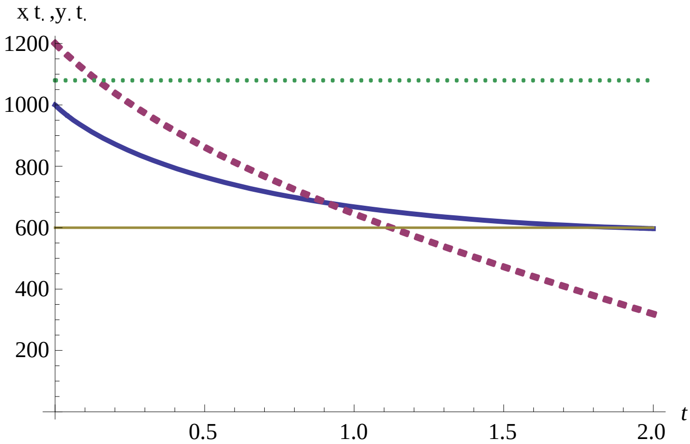

Рис. 2. Динамика боя (количество непораженных бойцов)

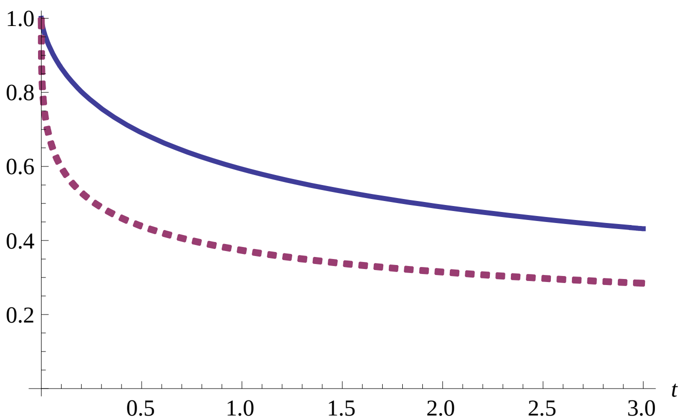

Рис. 3. Доли активных участников боя

У первой стороны (λ_x = 0,4, сплошная линия) в ходе боя доля активных участников выше 0,5. Тогда как соответствующая доля активных участников второй стороны (λ_y = 0,1, пунктирная линия) уже на начальном этапе боя опускается ниже 0,4, что можно считать признаком завершения боя с победой первой стороны.

Таким образом, нами получены уточненные уравнения модели Осипова, позволяющие учесть в бою (пограничном конфликте) морально-волевые качества индивидов. Аналогичные модификации можно внести в модель ланчестеровского типа [24]:

(11) $$\frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) - bx(t)y(t) - cy + d\,,$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -ey(t) - fy(t)x(t) - gx(t) + h\,,$$

где a и e определяют скорость небоевых потерь, b и f – скорость потерь из-за воздействия по площадным целям, c и g – скорость потерь от воздействия противника на переднем крае, d и h – подходящие (отходящие) резервы.

Верификация и оценка параметров моделей боя обычно выполняется на основе анализа военных операций и сражений периода Второй мировой войны и локальных войн. В частности, установлена почти линейная зависимость темпов наступления от начального соотношения сил и средств, выявлена статистическая зависимость потерь наступающей стороны от начального соотношения сил в операции. На основе данных военной статистики [22] можно предположить, что зависимость суточных потерь $0 < L < 1$ наступающей стороны от начального соотношения сил $\delta > 0$ имеет вид

(12) $$L = \frac{k_n}{\delta}, \quad k_n \approx 0{,}15,$$

где k_n – статистический параметр.

Например, при соотношении сил 3 : 1 суточные потери наступающих будут примерно равны: L = 0,15/3 = 0,05, т.е. 5% от начальной численности.

В работе [27] рассмотрена иерархия моделей боя, где на нижнем уровне методом Монте–Карло оцениваются боевые эффективности отдельных боевых единиц, на среднем уровне – модели боя на основе дискретных и непрерывных цепей Маркова [1], на верхнем – дифференциальные уравнения.

В дополнение к предложенной иерархии моделей нижнего уровня рассмотрим модель, основанную на использовании функций конфликта и принципов боя.

3. Вероятностная модель пограничного конфликта (боя)

Отметим следующие особенности пограничного конфликта:

1) относительно малые численности участников (в сравнении с боем, сражением);

2) технологический фактор менее значим в сравнении с моральным фактором (меньше видов боевого обеспечения).

Пограничные конфликты подразделяются (основание классификации – географическая среда) на морские, речные, сухопутные конфликты, конфликты в городской среде (в пункте пропуска).

С. Скапердас [25] предложил следующую функцию успеха в конфликте (вероятность победы первого игрока):

$$p_x(x, y) = \frac{g(x)}{g(x) + g(y)}, \tag{13}$$

где x – количество материального ресурса (усилий) в распоряжении первого игрока; y – количество материального ресурса (усилий) в распоряжении второго игрока; g – функция, задающая технологию конфликта.

Оперируя показателями λ_x и λ_y, характеризующими моральный дух сторон, выражение (13) можно переписать в виде

$$(14)\quad p_x(x,y) = \frac{\alpha\lambda_x x}{\alpha\lambda_x x + \lambda_y y} = \frac{\alpha\rho x}{\alpha\rho x + y}, \quad \rho = \lambda_x / \lambda_y,$$

где α – параметр технологического превосходства первой стороны над второй.

Выражение (14) имеет прозрачную тактическую интерпретацию. Допустим, что исход боя определяется результатами боестолкновений отдельных боевых единиц сторон, а сами боевые единицы с точки зрения их боевых возможностей однородны (т.е. каждая боевая единица в равной степени пользуется результатами обеспечения боя, разведки, наведения и т.д.). Тогда вероятность победы в бою первой стороны оценивается с использованием классического определения вероятности.

Исходя из определения боя (совокупность согласованных по цели, месту и времени ударов, огня и маневра войск [4]) и его принципов параметр боевого превосходства α вычислим с использованием определения среднего геометрического:

$$(15)\quad \alpha = \sqrt[4]{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}, \quad \alpha_j > 0, j = 1, \ldots, 4,$$

где

α_1 – коэффициент превосходства первой стороны во всестороннем обеспечении и опыте командования;

α_2 – коэффициент превосходства первой стороны в средствах разведки, навигации и связи;

α_3 – коэффициент превосходства первой стороны в маневренности;

α_4 – коэффициент превосходства первой стороны в огневых возможностях.

Коэффициент α_1 отражает опыт и мастерство командиров по подготовке к бою разнородных подразделений (групп), обеспечению непрерывного боевого и других видов обеспечения.

Использование среднего геометрического дает пессимистическую оценку параметра α (среднее геометрическое не больше среднего арифметического, неравенство Коши). Так как коэффициенты $\alpha_j > 0$, $j = 1, \ldots, 4$, являются относительными величинами, то для определения среднего следует использовать среднее геометрическое.

Преобразуем выражение (14) к виду

$$(16)\quad p_x = \frac{\alpha\rho x}{\alpha\rho x + y} = \frac{\beta x}{\beta x + y},$$

где β – параметр боевого (морального и технологического) превосходства первой стороны над второй.

Для оценки параметра β воспользуемся функцией правдоподобия L:

$$(17)\quad L = \prod_{i=1}^{m} (p_i)^s (1 - p_i)^{1-s} = \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{\beta x_i}{\beta x_i + y_i} \right)^s \left(\frac{y_i}{\beta x_i + y_i} \right)^{1-s},$$

где m – количество наблюдений за ходом и результатами боев (объем выборки); p_i – вероятность победы первой стороны в i-м бою (неизвестная величина); s – доля боев, в которых победила первая сторона; $x_i > 0$ – количество боевых единиц первой стороны, участвовавших в i-м бою; $y_i > 0$ – количество боевых единиц второй стороны, участвовавших в i-м бою.

Оценивание параметра можно выполнить максимизацией логарифмической функции правдоподобия:

$$(18)\quad l = \ln L = \sum_{i=1}^{m} \left\{ s \ln\left(\frac{\beta x_i}{\beta x_i + y_i} \right) + (1 - s) \ln\left(\frac{y_i}{\beta x_i + y_i} \right) \right\}.$$

Необходимым условием экстремума является равенство нулю первой производной правдоподобия по параметру. Вычислим первую производную:

$$(19)\quad \frac{\partial l}{\partial \beta} = \frac{ms}{\beta} - \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i}{\beta x_i + y_i}.$$

Решая численным методом уравнение (равенство нулю первой производной)

$$(20)\quad \frac{ms}{\beta} - \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i}{\beta x_i + y_i} = 0,$$

находим искомое значение параметра β.

В точке, где значение первой производной равно нулю, проверяем значение второй производной:

$$(21)\quad \frac{\partial^2 l}{\partial \beta^2} = -\frac{ms}{\beta^2} + \sum_{i=1}^{m} \frac{(x_i)^2}{(\beta x_i + y_i)^2}.$$

Если оно отрицательно, нами найден максимум функции правдоподобия и, следовательно, искомое значение параметра.

4. Теоретико-игровая задача распределения ресурса по объектам охраны

Задача распределения ограниченных ресурсов обороны и нападения (игра полковника Блотто) известна в нашей стране с 1961 г. [20]. Рассмотрим постановку теоретико-игровой задачи распределения ресурса по объектам охраны с использованием расширенной вероятностной модели конфликта, учитывающей моральные потенциалы сторон.

Обозначим через $N = \{1, \ldots, n\}$ множество объектов охраны, через $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – действие первого игрока (охраны), через $y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ – действие второго игрока (нападающих), где $x_i \geq 0$ ($y_i \geq 0$) – количество ресурса, выделенного первым (вторым) игроком на объект i. На ресурсы наложены ограничения:

$$(22)\quad \sum_{i \in N} x_i \leq R_x,$$

$$(23)\quad \sum_{i \in N} y_i \leq R_y.$$

Заданы целевые функции сторон (охраны и нападающего):

$$(24)\quad F_x(x,y)=\sum_{i\in N}V_i p_i(x_i,y_i)=\sum_{i\in N}V_i\frac{\alpha_i\rho x_i}{\alpha_i\rho x_i+y_i}\to\max,$$

$$(25)\quad F_y(x,y)=\sum_{i\in N}V_i(1-p_i(x_i,y_i))=\sum_{i\in N}V_i\frac{y_i}{\alpha_i\rho x_i+y_i}\to\max,$$

где $\rho > 0$ – отношение моральных потенциалов сторон; $\alpha_i > 0$ – параметр боевого превосходства первой стороны (охраны) на объекте i. Вероятность $p_i(x_i, y_i)$ победы первого игрока на объекте i является расширением вероятностной модели конфликта, учитывающей моральные потенциалы сторон.

Равновесие Нэша. Положим, что ожидаемые продолжительности тактических циклов действий сторон (охраны и нападения) примерно одинаковы. Тогда есть основания считать, что решения сторонами (игроками) принимаются одновременно и независимо. Известно, что ситуация игры равновесна по Нэшу, если отклонение от нее одного из игроков не может увеличить его выигрыша.

Замечаем, что целевая функция $F_x(x, y)$ непрерывна и вогнута по x при любом фиксированном y, а функция $F_y(x, y)$ – непрерывна и выпукла по y при любом фиксированном x, ограничения (22) задают выпуклые компакты евклидового пространства E^n. Следовательно, в игре существует равновесие Нэша. Для нахождения решения игры рассмотрим эквивалентные задачи выпуклой оптимизации:

$$(26)\quad f_x(x)=-\sum_{i\in N}V_i\frac{\alpha_i\rho x_i}{\alpha_i\rho x_i+y_i}\to\min,\quad \sum_{i\in N}x_i-R_x\le 0,$$

$$(27)\quad f_y(y)=-\sum_{i\in N}V_i\frac{y_i}{\alpha_i\rho x_i+y_i}\to\min,\quad \sum_{i\in N}y_i-R_y\le 0$$

с функциями Лагранжа (задачи удовлетворяют условию Слейтера):

$$(28)\quad L_x(x,\lambda)=-\sum_{i\in N}V_i\frac{\alpha_i\rho x_i}{\alpha_i\rho x_i+y_i}+\lambda\left(\sum_{i\in N}x_i-R_x\right),$$

(29) $L_y\left(y,\mu\right) = -\sum_{i\in N} V_i \frac{y_i}{\alpha_i \rho x_i + y_i} + \mu\left(\sum_{i\in N} y_i - R_y\right)$,

где λ и μ – множители Лагранжа.

Необходимыми условиями экстремума являются условия стационарности, дополняющей нежесткости и неотрицательности множителя Лагранжа. Запишем эти условия для задачи первого игрока (охраны):

(30) $-V_i \frac{\alpha_i \rho y_i}{(\alpha_i \rho x_i + y_i)^2} + \lambda = 0$, $i \in N$,

(31) $\lambda\left(\sum_{i\in N} x_i - R_x\right) = 0$, $i \in N$,

(32) $\lambda \geq 0$.

В силу положительности ценностей объектов и неотрицательности ресурса игроков, из (30) следует, что $\lambda > 0$. Тогда условие (22) выполняется как равенство, что следует из (31).

Необходимые условия экстремума для второго игрока (нападающих):

(33) $-V_i \frac{\alpha_i \rho x_i}{(\alpha_i \rho x_i + y_i)^2} + \mu = 0$, $i \in N$,

(34) $\mu\left(\sum_{i\in N} y_i - R_y\right) = 0$, $i \in N$,

(35) $\mu \geq 0$.

и условие (23) выполняется как равенство.

Разделив (30) на (33), получим

(36) $\frac{y_i}{x_i} = \frac{\lambda}{\mu}$, $i \in N$.

С учетом ограничений-равенств (22)–(23) из (36) имеем

(37) $\frac{R_y}{R_x} = \frac{\lambda}{\mu}$.

Подставим $x_i = y_i\, R_x/R_y$ в (30) и найдем:

$$(38)\quad y_i = V_i \frac{\alpha_i \rho (R_y)^2}{\lambda(\alpha_i \rho R_x + R_y)^2}, \quad i \in N,$$

или (с учетом ограничения (22))

$$(39)\quad R_y = \frac{\rho (R_y)^2}{\lambda} \sum_{i \in N} V_i \frac{\alpha_i}{(\alpha_i \rho R_x + R_y)^2},$$

$$(40)\quad \lambda = \rho R_y \sum_{i \in N} \frac{V_i \alpha_i}{(\alpha_i \rho R_x + R_y)^2}.$$

Аналогично находим значение μ:

$$(41)\quad x_i = V_i \frac{\alpha_i \rho (R_x)^2}{\mu(\alpha_i \rho R_x + R_y)^2}, \quad i \in N,$$

или (с учетом ограничения (23))

$$(42)\quad R_x = \frac{\rho (R_x)^2}{\mu} \sum_{i \in N} V_i \frac{\alpha_i}{(\alpha_i \rho R_x + R_y)^2},$$

$$(43)\quad \mu = \rho R_x \sum_{i \in N} \frac{V_i \alpha_i}{(\alpha_i \rho R_x + R_y)^2}.$$

Подставим значения множителей Лагранжа в (30) и (33):

$$(44)\quad V_i \frac{\alpha_i \rho y_i}{(\alpha_i \rho x_i + y_i)^2} = \rho R_y \sum_{j \in N} \frac{V_j \alpha_j}{(\alpha_j \rho R_x + R_y)^2}, \quad i \in N,$$

$$(45)\quad V_i \frac{\alpha_i \rho x_i}{(\alpha_i \rho x_i + y_i)^2} = \rho R_x \sum_{j \in N} \frac{V_j \alpha_j}{(\alpha_j \rho R_x + R_y)^2}, \quad i \in N.$$

Из выражений (40) и (43) следует, что множители Лагранжа строго положительны. Следовательно, нами получены необходимые условия экстремума. Учитывая равенство $x_i = y_i R_x/R_y$, находим оптимальное распределение ресурсов:

$$(46)\quad x_i^* = \frac{V_i \alpha_i R_x}{S(\alpha_i \rho R_x + R_y)^2}, \quad i \in N, \quad S = \sum_{j \in N} \frac{V_j \alpha_j}{(\alpha_j \rho R_x + R_y)^2},$$

$$(47)\quad y_i^* = \frac{V_i \alpha_i R_y}{S(\alpha_i \rho R_x + R_y)^2}, \quad i \in N.$$

Оптимальные выигрыши сторон равны:

$$(48)\quad F_x(x^*, y^*) = \sum_{i \in N} V_i \frac{\alpha_i \rho R_x}{\alpha_i \rho R_x + R_y}, \quad F_y(x^*, y^*) = \sum_{i \in N} V_i \frac{R_y}{\alpha_i \rho R_x + R_y}.$$

Таким образом, оптимальное распределение ресурса охраны и нападающих по объектам зависит от имеющихся суммарных ресурсов сторон, ценностей объектов охраны, соотношения моральных потенциалов сторон и значений параметра превосходства на объектах.

5. Влияние общественных издержек на ход и исход войн

Победа в войнах не всегда определяется соотношением военных потенциалов государств-участников, чему в истории имеется множество подтверждений (война США во Вьетнаме, война СССР в Афганистане и др.). Для анализа и прогноза исхода войн необходимо учитывать отношение народов к войне.

В таблице 1 представлены данные по потерям США в крупных войнах [10].

Таблица 1. Потери США в ходе войн

	Убито, тыс. чел.	Ранено, тыс. чел.	Общая численность ВС, тыс. чел.*	% потерь ВС	% потерь населения
Вторая мировая война 1939–1945 гг.	407,3	671,8	14903,2	7,2	0,8
Корейская война 1950–1953 гг.	36,6	103,3	5764,1	2,4	0,09
Вьетнамская война 1964–1973 гг.	58,2	153,4	8752,0	2,4	0,11
Война в Персидском заливе	0,383	0,467	665,5	0,1	0,0003

* *Общее количество военнослужащих, принимавших участие в военной операции.*

Проценты потерь (убитыми и раненными) в Корее и Вьетнаме: 2,4% от общей численности вооруженных сил (ВС) США и, соответственно, 0,09% и 0,11% от численности населения. Существенное отличие между двумя войнами заключается в масштабах антивоенных выступлений, дезертирства и отказа от призыва. В годы войны во Вьетнаме антивоенное движение оказалось более мощным и превзошло антивоенные выступления в годы корейской войны по всем показателям: общее количество участников, размах, количество акций протеста, формы и их распространение [10].

В таблице 2 представлены данные по годам о потерях вооруженных сил и количестве протестующих [23].

Таблица 2. Потери США в годы вьетнамской войны и протесты

Год	Потери ВС США	Средний % поддержки	Количество протестующих
1965	1 000	62,50	50 000
1966	6 000	51,75	100 000
1967	16 000	48,00	400 000
1968	30 000	39,00	625 000
1969	40 000	35,50	850 000
1970	44 000	33,75	925 000
1971	45 000	29,50	1 000 000

Из таблицы видно, что с ростом боевых потерь (убитыми) росло количество протестующих против войны и снижалась поддержка правительства со стороны общества. Переломным моментом в сломе поддержки войны со стороны СМИ считается 27 февраля 1968 г. (передача телеведущего У. Кронкайта, который военный успех армии США представил как «ничью», «тупик», «мертвую точку») [10].

Пусть имеются две стороны, участвующие в конфликте. Обозначим через $x(t)$ ($y(t)$) численность участников первой (второй) стороны в момент времени $t > 0$, численности в нулевой момент времени – x_0 и y_0 соответственно. Пусть первая сторона имеет решающее превосходство в силах и средствах над второй стороной и, вместе с тем, является агрессором, тогда как вторая сторона считает конфликт справедливым, а победу в нем – крайне важной. Обозначим через X_0 и Y_0 численности населения первой и второй страны в момент начала конфликта. Положим, что за время конфликта естественным приростом (убылью) населения можно пренебречь. Обозначим Λ_x и Λ_y выдерживаемую обществом первой и второй страны долю потерь. Рассмотрим модель с вводом резервов – стороны поддерживают численности своих войск на одном уровне, компенсируя потери. Из уравнений Осипова–Ланчестера (модель с переносом огня) и условия постоянства численности войск получим

(49) $x_R(t) - a_y y(t) = 0, \quad y_R(t) - a_x x(t) = 0,$

$$x_R(t) = x_0 - x(t), \quad y_R(t) = y_0 - y(t),$$

где a_x и a_y –коэффициенты боевой эффективности первой и второй стороны; $x_R(t)$ и $y_R(t)$ – количество введенного в сражение резерва (равного потерям в ходе боев).

Решение уравнений (49):

(50) $x_R(t) = x_0 - x(t) = a_y \dfrac{y_0 - a_x x_0}{1 - a_x a_y},$

$$y_R(t) = y_0 - y(t) = a_x \frac{x_0 - a_y y_0}{1 - a_x a_y}.$$

Рассмотрим ***пример***. Пусть численности населения воюющих государств равны X_0 = 200 000 000 чел., Y_0 = 40 000 000 чел.; численности их войск: x_0 = 500 000 чел., y_0 = 2 500 000 чел., военные потери за t = 9 лет: $x_R(t)$ = 60 000 чел.; $y_R(t)$ = 1 000 000 чел.

Из (49) при t = 9 находим:

$$a_x = \frac{y_R(t)/9}{x_0 - x_R(t)/9} \approx 0{,}225, \quad a_y = \frac{x_R(t)/9}{y_0 - y_R(t)/9} \approx 0{,}003$$

(коэффициент боевой эффективности боевой единицы первой стороны в 80 раз выше соответствующего коэффициента второй стороны).

Нижние оценки потерь стран (без учета раненых) равны

$\Lambda_x = 0{,}03\%$; $\Lambda_y = 2{,}5\%$.

Несмотря на значительное технологическое превосходство первой страны (США) над второй (Вьетнамом), первая страна проиграла войну, что можно объяснить неспособностью и неготовностью американского общества нести высокие социальные издержки в войне, цели которой народу не близки.

6. Модель социально-информационного влияния

В соответствии с концепцией Д. Бойда [7] войны с совре– менную информационную эпоху состоят из трех элементов: Moral warfare (разрушение воли противника к достижению победы); Mental warfare (искажение восприятия противником реальности) и Physical warfare (традиционные военные действия). По оценке В.Т. Третьякова, во всех современных демократических обществах существуют и эффективно действуют механизмы мобилизации свободной прессы для выполнения задач, которые ставит перед страной (нацией) официальная власть, в том числе и задач военных [21].

Рассмотрим модель социально-информационного влияния, позволяющую оценить эффективность социально-информационных воздействий. Пусть $0 \le \theta \le 1$ есть показатель, характеризующий отношение индивидов к войне (социальному конфликту и т.д.). Для учета социально-информационных воздействий на индивидов определим *функцию представления* $B(y_+, y_-, \theta) = B(\theta)$ о показателе $\theta \in [0, 1]$ в условиях воздействий $y_+ \ge 0$ ($y_- \ge 0$), направленных на увеличение (уменьшение) представления о значении показателя, как функцию вида

(51) $B(\cdot)$: $[0, 1] \to [0, 1]$.

В условиях разнонаправленных воздействий определим функцию представления в виде

(52) $B(y_+, y_-, \theta) = \alpha B_+(y_+, \theta) + (1-\alpha)B_-(y_-, \theta)$,

где $0 < \alpha < 1$ – параметр, позволяющий учесть степень усвоения индивидами воздействий определенной направленности. Применительно к военным конфликтам параметр α может отражать долю «милитаристов» в обществе.

Сформулируем ***гипотезу***. Предположим, что изменение представления подчиняется основному психофизическому закону в форме С. Стивенса и стремится к нулю при $\theta = 0$ и $\theta = 1$. Иными словами, достоверное (невозможное) событие остается таковым в условиях социально-информационных воздействий. Тогда получим следующие дифференциальные уравнения:

(53) $$\frac{d}{dy_+} B_+(\cdot) = \alpha k_{y_+} (y_+)^{\nu} B_+(\cdot)(1 - B_+(\cdot)),$$

$$\frac{d}{dy_-} B_-(\cdot) = -(1-\alpha) k_{y_-} (y_-)^{\upsilon} B_-(\cdot)(1 - B_-(\cdot)),$$

где $k_{y+} \geq 0$ $(k_{y-} \geq 0)$ – параметр размерности воздействий, направленных на увеличение (уменьшение) представления; $\nu \geq 0$ $(\upsilon \geq 0)$ характеризует модальность воздействия.

Параметры размерности k_{y+} и k_{y-} характеризуют среднюю долю суточного времени, затрачиваемого индивидами на удовлетворение той или иной базовой потребности.

Решениями уравнений (53) являются следующие выражения:

(54) $$B_+(y_+, \theta) = \frac{\theta \exp(z_{y+})}{1 - \theta + \theta \exp(z_{y+})}, \quad z_{y+} = \frac{k_{y+}}{\nu + 1}(y_+)^{\nu+1},$$

(55) $$B_-(y_-, \theta) = \frac{\theta \exp(-z_{y-})}{1 - \theta + \theta \exp(-z_{y-})}, \quad z_{y-} = \frac{k_{y-}}{\upsilon + 1}(y_-)^{\upsilon+1}.$$

Для оценки параметра модальности можно использовать выражение [9]

(56) $$\nu = \frac{\ln R_{max} - \ln R_{min}}{\ln S_{max} - \ln S_{min}},$$

где S_{max} (S_{min}) – максимальное (минимальное) значение интенсивности раздражителя; R_{max} (R_{min}) – максимальное (минимальное) значение стимула.

Применительно к реакции американского общества на войну в Корее и войну во Вьетнаме получено [23] $\nu = \upsilon = 1{,}3$.

Имея модель социально-информационного влияния, можно ставить и решать задачи социально-информационного управления и противоборства.

Рассмотрим ***пример*** задачи социально-информационного управления. Допустим, что в обществе имеется консенсус о важности военной кампании, характеризуемый показателем $\theta = 0{,}6$. Доли «милитаристов» и «пацифистов» в обществе одинаковы, т.е. $\alpha = 0{,}5$. Под воздействием военных потерь формируются социальные действия размера $y_- = 5$ с параметром модальности $\upsilon = 1{,}3$. При $k_{y+} = k_{y-} = 0{,}1$ и параметре модальности $\nu = 0{,}8$ найти количество социально-информационных воздействий, направленных на увеличение представления о параметре θ, при котором значение функции представления $B(\theta)$ будет не ниже 0,6.

Из выражения (55) находим: $B_-(y_-, \theta) = 0{,}21$. Из условия (52) получаем

$$0{,}5B_+(y_+, \theta) + 0{,}5 \cdot 0{,}21 = 0{,}6$$

или

$$B_+(y_+, \theta) = 0{,}99, \ \exp(z_{y+}) = 0{,}219.$$

Решая последнее уравнение, получим $y_+ = 11{,}04$. Таким образом, в условиях примера для компенсации воздействий $y_- = 5$, направленных на снижение представлений о параметре θ, необходимо сформировать воздействия противоположной направленности размера $y_+ > 11$.

Отметим, что наряду с рассмотренной моделью социально-информационного влияния известно множество других моделей, обзор которых можно найти в работах [14, 15].

7. Заключение

Рассмотрена иерархия моделей боевых действий и пограничных конфликтов.

На нижнем уровне оперируют имитационными моделями, данными войсковых испытаний, что позволяет выполнить переход от физических и технических характеристик к тактическим (модели операционного уровня). Данные модели лежат в основе построения предтактических моделей (боевые группы от подразделения) и тактических моделей нижнего уровня (ротные и батальонные тактические группы, группы пограничного конфликта). Эти модели могут строиться, в частности, с использованием вероятностных функций конфликта. Предложено использовать вместо функции конфликта С. Скапердаса ее расширение, позволяющее учесть моральные характеристики и боевую устойчивость участников боя (конфликта).

На тактическом и оперативно-тактическом уровне обычно используются модели, использующие метод динами средних (модели Осипова–Ланчестера и их модификации). Рассмотрено расширение модели Осипова–Ланчестера, учитывающее морально-волевые качества (процент выдерживаемых потерь) бойцов.

На уровне государства и общества применяются социально-политические, социально-экономические и рефлексивные модели, модели социально-информационного влияния для оценки военных потенциалов, уровней национальной, общественной и государственной безопасности, готовности общества выдерживать связанные с войной издержки.

Имея модели динамики военного сражения, боя, пограничного конфликта, издержек общества, можно ставить и решать задачи управления и противоборства.

Литература

1. АЛЕКСЕЕВ О.Г., АНИСИМОВ В.Г., АНИСИМОВ Е.Г. *Марковские модели боя* : Учебное пособие. – М.: Министерство обороны СССР, 1985. – 85 с.
2. ВАСИН А.А., МОРОЗОВ В.В. *Теория игр и модели математической экономики* : Учеб. пособие. – М.: Макс-Пресс, 2005. – 278 с.
3. ВЕНТЦЕЛЬ Е.С. *Исследование операций*. – М.: Советское радио, 1972. – 552 с.
4. *Война и мир в терминах и определениях* : военно-политический словарь / Под общ. ред. Д. Рогозина. – М.: ПоРог, 2004. – 334 с.
5. ГОЛОВИН Н.Н. *Исследование боя. Исследование деятельности и свойств человека как бойца*. Кн. 2. Статьи и письма. – М.: ВАГШ, 1995. – 303 с.
6. ГОЛОВИН Н.Н. *Наука о войне. О социологическом изучении войны*. – Париж: Издательство газеты «Сигнал», 1938. – 242 с.
7. ИВЛЕВ А.А. *Основы теории Бойда. Направления развития, применения и реализации* : Монография. – М.: 2008. В рукописи. – 64 с.
8. КЛАУЗЕВИЦ К. *О войне*. – М.: Госвоениздат, 1934. Англ.: Clausewitz K. Vom Krieg. 1832/34.
9. КРЫЛОВ А.А. *Психология* : Учебник. – М.: Проспект, 2005. – 744 с.

10. КУЗНЕЦОВ Д.В. *Использование военной силы во внешней политике США* : Учебное пособие. – Благовещенск: Изд-во БГПУ, 2010. – 430 с.
11. *Механизмы управления*: Учебное пособие / Под ред. Д.А. Новикова. – М.: УРСС (Editorial URSS), 2011. – 216 с.
12. МОРЗ Ф.М., КИМБЕЛЛ Дж.Е. *Методы исследования операций* / Пер. с англ. И.А. Полетаева и К.Н. Трофимова под ред. А.Ф. Горохова. – М.: Советское радио, 1956. – 308 с. Англ.: Morse P.M., Kimball G.E. Methods of Operations Research. – Cambridge, MA: Technology Press of MIT / New York: John Wiley & Sons, 1951. – 158 p.
13. НОВИКОВ Д.А. *Иерархические модели военных действий* // Управление большими системами. – 2012. – Вып. 37. – С. 25–62.
14. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Прикладные модели информационного управления*. – М.: ИПУ РАН, 2004. – 129 с.
15. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Рефлексия и управление: математические модели*. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 2013. – 412 с.
16. ОСИПОВ М.П. *Влияние численности сражающихся сторон на их потери* // Военный сборник. – 1915. – №6. – С. 59–74; №7. – С. 25–36; №8. – С. 31–40; №9. – С. 25–37.
17. ОУЭН Г. *Теория игр* / Пер. с англ. под ред. А. А. Корбута со вступ. статьей Н.Н. Воробьева. – М.: Мир, 1971. – 230 с.
18. ПАВЛОВСКИЙ Ю.Н. *О факторе Л. Н. Толстого в вооруженной борьбе* // Математическое моделирование. – 1993. – Т. 5, №1. – С. 3–15.
19. ПЛЕХОВ А.М. *Словарь военных терминов*. – М.: Военное издательство, 1988. – 335 с.
20. *Применение теории игр в военном деле* / Сборник переводов. – М.: Советское радио, 1961. – 360 с.

21. ТРЕТЬЯКОВ В.Т. *Как стать знаменитым журналистом: курс лекций по теории и практике современной русской журналистики*. – М.: Ладомир, 2004. – 623 с.
22. ЦЫГИЧКО В.И., СТОИЛИ Ф. *Метод боевых потенциалов: история и настоящее* // Военная мысль. – 1997. – №4. – С. 23–28.
23. ШУМОВ В.В. *Анализ социально-информационного влияния на примере войн США в Корее, Вьетнаме и Ираке* // Компьютерные исследования и моделирование. – 2014. – Т. 6, №1. – С. 167–184.
24. LANCHESTER F.W. *Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm*. – London : Constable and Co, Ltd., 1916. – 243 p.
25. SKARPEDAS S. *Contest success functions* // Economic Theory. – 1996. – No. 7. – P. 283–290.
26. STEVENS S.S. *On the psychophysical law* // Psychol Rev. – 1957. – No. 64(3). – P. 153–181.
27. TAYLOR J., YILDIRIM U., MURPHY W. *Hierarchy-of-Models Approach for Aggregated-Force Attrition* // Proc. of the 2000 Winter Simulation Conference. – Orlando, 2000. – P. 925–932.

HIERARCHY OF MODELS OF MILITARY ACTIONS AND BORDER CONFLICTS

Vladislav Shumov, International Informatizational Academy, Moscow, Cand.Sc., senior lecturer (vshum59@yandex.ru).

Abstract: The substantive aspects of wars, battles, military and border conflicts and the views on them of military theorists are discussed. Three levels of models are highlighted. At the lower level, a probabilistic conflict function based on the definition of a battle (a set of coordinated targets, place and time of strikes, fire and maneuver of troops) is used to simulate the combat of subunits, which takes into account the numbers of combat units of the parties and the parameter of combat superiority. His statistical estimate was found by the maximum likelihood method. Military superiority is moral superiority (taken into account through the percentages of bloody losses sustained by the parties) and technological (superiority in the organization of interaction, in maneuver, reconnaissance and fire capabilities). The *game-theoretic problem of 26 resource allocation among the objects of defense has been solved. Models of the middle level are extensions of the classical Osipov – Lanchester fight equations that take into account the moral potentials of the parties using the basic law of psychophysics. The results of the calculations do not contradict the provisions of the military science of the combat capabilities of the troops. In the top-level models, the social costs of the course and outcome of wars. In particular, the loss of the United States in the Vietnam War can be explained by the lack of readiness of American society to bear casualties in a war with unclear objectives.*

Keywords: mathematical modeling, Osipov-Lanchester model, hierarchy of models, moral factor.

УДК 519.876.2
ББК 32.81

DOI: https://doi.org/10.25728/ubs.2019.79.4

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким.

Поступила в редакцию 04.12.2017.
Опубликована 31.05.2019.