ОДНА СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ[1]

Соболев В. Н.[2]
(*Москва*)

Рассматривается однолинейная система массового обслуживания с групповым поступлением требований, в которой моменты поступления групп требований образуют пуассоновский поток, длительности обслуживания имеют показательное распределение, число заявок в группе ограничено, а число мест для ожидания не ограничено. В приходящей группе может быть только одно или два требования. Для данной системы массового обслуживания найдено алгебраическое представление для стационарных вероятностей числа заявок в системе. Данное распределение вероятностей выписывается через многочлены, подобные многочленам Фибоначчи. Частным случаем возникающего распределения является геометрическое распределение. Связь рассматриваемых многочленов с числами Фибоначчи позволяет при определённых условиях на параметры исследуемой системы представить распределение, выписанное через обобщённые многочлены, в виде распределения, содержащего числа Фибоначчи. С помощью формулы Бине для данных многочленов показывается, что в некоторых случаях найденное распределение является асимптотически геометрическим. При этом погрешность убывает экспоненциально. Опираясь на распределение вероятностей, содержащее числа Фибоначчи, в работе представлен элементарный вероятностный вывод производящей функции для чисел Фибоначчи. Доказательство одного комбинаторного тождества позволяет получить представление чисел Фибоначчи через двойную сумму биномиальных коэффициентов, а также показывает второй способ нахождения искомых вероятностей. Из данного тождества путем изменения порядка суммирования для чисел Фибоначчи получаются либо представление Каталана, либо формула Лукаса.

Ключевые слова: система массового обслуживания, групповое поступление, стационарное распределение, производящая функция вероятностей, числа Фибоначчи, биномиальные коэффициенты, суммы биномиальных коэффициентов, последовательность Фибоначчи, обобщенные многочлены Фибоначчи, обобщённые числа Фибоначчи, формула Бине, производящая функция, производящая функция чисел Фибоначчи, геометрическое распределение.

---

[1] *Автор пользуется случаем и благодарит В.В. Козлова за постоянное внимание к его работе, плодотворное обсуждение и редакционные замечания.*

[2] *Виталий Николаевич Соболев, к.ф.-м.н., свободный исследователь* (*sobolev_vn@mail.ru*).

1. Введение

Данная работа тесно связана со статьёй [5] и в некотором смысле является её продолжением.

Рассмотрим систему массового обслуживания $M_\lambda^2|M_\mu|1|\infty$. В данной системе моменты поступления требований $0 < t_1 < < t_2 < ... < t_n < ...$ образуют пуассоновский поток с интенсивностью λ. В каждый момент t_n поступает группа из ν_n требований, причем случайные величины ν_n независимы, одинаково распределены и принимают значения 1 или 2 с вероятностями α_1 и α_2. Среднее число заявок в группе ν. В системе имеется один обслуживающий прибор, время обслуживания которого распределено по показательному закону с параметром μ. Число мест для ожидания неограниченно.

Пусть $\xi(t)$ – число требований, находящихся в системе $M_\lambda^2|M_\mu|1|\infty$ в момент времени t. В [6, с. 171–175] для более широкого класса систем вида $GI^\nu|M_\mu|1|\infty$ была найдена производящая функция стационарного распределения процесса $\xi(t)$:

$$P(z) = \lim_{t\to\infty} Mz^{\xi(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k.$$

В данной работе в рамках системы $M_\lambda^2|M_\mu|1|\infty$ найдено (пункт 3.1.) алгебраическое представление для стационарных вероятностей процесса $\xi(t)$. Так, для искомых вероятностей p_k доказывается их представление

$$p_k = (1-\rho_0\nu)\rho_0^k S_k\left(\frac{\alpha_2}{\rho_0}\right)$$

через многочлены [3, с. 294]

$$S_k(z) = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2\rfloor} C_{k-j}^j z^j,$$

где C_{k-j}^j – биномиальные коэффициенты и $\rho_0 = \frac{\lambda}{\mu}$.

Далее показывается, что геометрическое распределение является частным случаем данного распределения.

В пункте 3.2. будет доказано, что при условии

$$\alpha_2 = \rho_0 < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

распределение искомых вероятностей выражается через числа Фибоначчи:

$$p_k = (1-\rho_0\nu)\rho_0^k u_{k+1},$$

где $u_{k+1} = S_k(1)$ – такое обозначение чисел Фибоначчи, что $u_0 = 0$, $u_1 = u_2 = 1$.

Представление чисел Фибоначчи [3, с. 365]

$$u_k = \left\lfloor \frac{\phi^k}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor, \ \ \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

позволяет записать вероятности p_k в следующем виде:

$$p_k = (1-\rho_0\nu)\rho_0^k \left\lfloor \frac{\phi^{k+1}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

В пункте 3.3. показывается, что данные вероятности p_k близки к геометрическому распределению:

$$p_k \approx \left(\frac{1-\rho_0\nu}{\sqrt{5}}\phi\right)(\rho_0\phi)^k.$$

Далее в этом же пункте доказывается, что и в общем случае при некоторых условиях на α_2 и ρ_0 рассматриваемое распределение приближается геометрическим распределением. При этом погрешность с ростом k убывает экспоненциально.

В пункте 4.3. показано, что выражение вероятностей через числа Фибоначчи приводит к простому вероятностному выводу производящей функции чисел Фибоначчи.

В работе (см. пункты 4.1. и 4.2.) предлагается простое доказательство следующего представления для чисел Фибоначчи:

$$u_{k+1} = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \sum_{l=j}^{\lfloor k/2 \rfloor} 2^{2j-k} C_{k+1}^{2l+1} C_l^j,$$

из которого при разных порядках суммирования получаются либо представление Каталана (Eugène Charles Catalan, 1857) [15, с. 68]

$$u_{k+1} = 2^{-k} \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} 5^l C_{k+1}^{2l+1},$$

либо формула Лукаса (Édouard Anatole Lucas, 1876) [11, с. 208]

$$u_{k+1} = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_{k-j}^{j},$$

где $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : \, n \leqslant x\}$.

2. Предварительные сведения и обозначения

2.1. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

По определению системы $M_\lambda^2|M_\mu|1|\infty$ длины интервалов $X_n = t_n - t_{n-1}$, которые представляют собой время между приходами двух соседних групп требований, независимы и одинаково распределены с функцией распределения

$$F(x) = P\{X_n < t\} = 1 - e^{-\lambda x}.$$

При этом среднее время T между поступлениями групп заявок в систему равно

$$T := \int_0^\infty x dF(x) = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}. \tag{1}$$

В каждый момент времени t_n поступает группа из ν_n требований, причем величины ν_n независимы и одинаково распределены. Также величины ν_n ограничены и их производящие функции равны

$$\alpha(z) = M z^{\nu_n} = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2, \tag{2}$$

где

$$\alpha_k = \mathsf{P}\{\nu_n = k\}, \; k = 1, 2.$$

С помощью производящей функции $\alpha(z)$ легко находится среднее число заявок в группе:

$$\nu := \mathsf{M}\nu_n = \alpha'(z)\big|_{z=1} = \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 + \alpha_2.$$

Пусть случайная величина Y_n обозначает время обслуживания (длину) n-й заявки. Величины Y_n независимы друг от друга и от величин X_n. По условию задачи величины Y_n имеют одинаковое распределение с функцией распределения

$$G(t) = 1 - e^{-\mu t}\,.$$

В этом случае среднее время обслуживания τ любой заявки конечно и равно

$$\tau := \mathsf{M}Y_n = \int_0^\infty x dG(x) = \frac{1}{\mu}.$$

Определим нагрузку (загрузку) системы как $\rho = \nu\rho_0$, где $\rho_0 = \lambda/\mu$.

В статье [6, с. 171–175] (см. также [13, с. 97–108] и [5]) найдена производящая функция для стационарных вероятностей случайного процесса $\xi(t)$ системы $GI^\nu|M_\mu|1|\infty$. Так, в [6] доказана справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Если в системе $GI^\nu|M_\mu|1|\infty$ выполнено условие $\rho < 1$, то стационарное распределение случайного процесса $\xi(t)$ существует и задается производящей функцией*

$$P(z) = \frac{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)...(1-\lambda_m)}{(1-\lambda_1 z)(1-\lambda_2 z)...(1-\lambda_m z)}, \tag{3}$$

где числа $\lambda_1,...,\lambda_m$ являются корнями уравнения (*считая каждый корень столько раз, какова его кратность*)

$$\alpha\left(\frac{1}{z}\right)\varphi(\mu - \mu z) = 1, \tag{4}$$

принадлежащими области $|z| < 1$. В уравнении (4) *функция $\varphi(z)$ есть преобразование Лапласа – Стильтьеса функции распределения $F(x)$*

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-xz} dF(x),\ z \geqslant 0.$$

2.2. ОБ ОБОБЩЁННЫХ МНОГОЧЛЕНАХ ФИБОНАЧЧИ

Поскольку алгебраическое представление искомых стационарных вероятностей p_k в системе $M_\lambda^2|M_\mu|1|\infty$ записывается с помощью многочленов [3, с. 294]

$$S_k(z) = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_{k-j}^j z^j, \tag{5}$$

то уделим им некоторое внимание.

Данные многочлены удовлетворяют [3, с. 295] следующему рекуррентному соотношению:

$$S_{k+2}(z) = S_{k+1}(z) + zS_k(z)$$

при начальном условии $S_0(z) = S_1(z) = 1$. Эти рекуррентные уравнения можно соотнести с уравнениями для многочленов Фибоначчи [10, с. 218]

$$F_{k+2}(z) = zF_{k+1}(z) + F_k(z),$$

где $F_0(z) = 0$, $F_1(z) = 1$. При подстановке $z = 1$ в многочлены $S_k(z)$ и $F_k(z)$ в обоих случаях получается линейное однородное рекуррентное уравнение для последовательности Фибоначчи.

Часто данные многочлены рассматриваются как частные случаи обобщённых многочленов Фибоначчи от двух переменных, которые удовлетворяют возвратному уравнению

$$F_{k+2}(z,t) = tF_{k+1}(z,t) + zF_k(z,t)$$

с начальными условиями $F_0(z,t) = 0$, $F_1(z,t) = 1$.

С другой стороны отметим, что многочлены $S_k(z)$ при начальных значениях $S_0(z) = a$, $S_1(z) = b$ описаны Сан (Yidong Sun) в работе [14], при этом автор называет такие многочлены обобщёнными многочленами Фибоначчи.

В работах [9, 10] изучается последовательность многочленов $W_k(z)$, задаваемых рекуррентными соотношениями

$$W_{k+2}(z) = p(z)W_{k+1}(z) + q(z)W_k(z).$$

Там же указано, что полиномы Фибоначчи $F_k(z)$ принадлежат к данному классу. Полиномы $S_k(z)$ очевидно подходят под описание данного класса, но в работе не указаны, хотя и близки в алгебраическом плане (но не в плане последовательностей чисел, ими порождаемых) к многочленам Якобсталя (см. [10, с. 218] и [7, с. 113]) задаваемых условием $p(z) = 1$, $q(z) = 2z$ при начальных условиях $W_0(z) = 0$, $W_1(z) = 1$.

Для многочленов Фибоначчи $F_k(z)$ название устоялось, в то время как для многочленов $S_k(z)$ нет: в разных работах они называются по разному или вовсе никак не называются.

В дальнейшем для многочленов $S_k(z)$ понадобится формула Бине (Jacques Philippe Marie Binet) [3, с. 368], которую оформим в виде следующей леммы.

Лемма 1. *Для многочленов $S_k(z)$ справедливо представление Бине:*

$$S_k(z) = \frac{\phi_1^{k+1} - \phi_2^{k+1}}{\phi_1 - \phi_2}, \tag{6}$$

где

$$\phi_1 = \phi_1(z) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4z}}{2}, \quad \phi_2 = \phi_2(z) = \frac{1 - \sqrt{1 + 4z}}{2}, \tag{7}$$

– корни уравнения $t^2 - t - z = 0$ (см. [8]).

Доказательство. При $k \geqslant 0$ в [3, с. 257] доказано равенство

$$S_k(z) = \tfrac{1}{\sqrt{1+4z}}\left(\left(\tfrac{1+\sqrt{1+4z}}{2}\right)^{k+1} - \left(\tfrac{1-\sqrt{1+4z}}{2}\right)^{k+1}\right). \tag{8}$$

В силу определения функций ϕ_1 и ϕ_2, а также справедливости равенства $\phi_1 - \phi_2 = \sqrt{1 + 4z}$ видно, что (8) совпадает с (6). На этом лемма доказана полностью.

3. Стационарные вероятности системы $M_\lambda^2|M_\mu|1|\infty$

3.1. ОБЩАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СИСТЕМЫ $M_\lambda^2|M_\mu|1|\infty$

В системе $M_\lambda^2|M_\mu|1|\infty$ согласно формуле (3) из теоремы 1 производящая функция стационарного распределения процесса $\xi(t)$ может быть записана в виде

$$P(z) = \frac{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)}{(1 - \lambda_1 z)(1 - \lambda_2 z)},$$

где числа λ_1, λ_2 являются корнями уравнения (4) при $|z| < 1$, считая каждый корень столько раз, какова его кратность.

Оказывается, что для системы $M_\lambda^2|M_\mu|1|\infty$ корни λ_1, λ_2 легко выражаются через α_2 и $\rho_0 = \lambda/\mu$.

Лемма 2. *У системы* $M_\lambda^2|M_\mu|1|\infty$ *при* $\rho < 1$ *корни* λ_1, λ_2 *уравнения* (4) *могут быть найдены по формулам*

$$\lambda_i = \frac{\rho_0}{2}\phi_i\left(\frac{\alpha_2}{\rho_0}\right),\ i = 1, 2, \tag{9}$$

где функции $\phi_1(z)$, $\phi_2(z)$ *определяются равенством* (7).

Доказательство. Как хорошо известно [1, с. 94], в случае $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ преобразование Лапласа – Стильтьеса функции распределения $F(x)$ принимает следующий вид:

$$\varphi(z) = \lambda \int_0^\infty e^{-(z+\lambda)x}dx = \frac{\lambda}{z+\lambda}.$$

Откуда

$$\varphi(\mu - \mu z) = \frac{\lambda}{\mu - \mu z + \lambda} = \frac{\rho_0}{1 + \rho_0 - z}.$$

Поэтому уравнение (4) для корней λ_1, λ_2 системы $M_\lambda^2|M_\mu|1|\infty$ принимает вид

$$\left(\alpha_1\frac{1}{z} + \alpha_2\frac{1}{z^2}\right)\frac{\rho_0}{1 - z + \rho_0} = 1,$$

а после элементарных преобразований

$$\rho_0(z(1-z) + \alpha_2(1-z)) = z^2(1-z).$$

Сокращение в последнем уравнении на множитель $(1-z)$ приводит к квадратному уравнению

$$z^2 - \rho_0 z - \rho_0\alpha_2 = 0$$

с корнями

$$\lambda_{1,2} = \frac{\rho_0}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\alpha_2}{\rho_0}}\right) = \frac{\rho_0}{2}\phi_{1,2}\left(\frac{\alpha_2}{\rho_0}\right).$$

Таким образом, лемма доказана.

Замечание 1. *Из* (9) *видно, что корни* λ_1 *и* λ_2 *совпадают только в случае* $\alpha_2 = 0$. *При этом рассматриваемая система* $M_\lambda^2|M_\mu|1|\infty$ *превращается в обычную систему* $M_\lambda|M_\mu|1|\infty$.

Для формулировки следующей леммы отметим, что при $\alpha_2 \neq 0$ корни исследуемого уравнения различны и противоположны по знаку, а также что отрицательный корень по модулю меньше положительного, т.е. $|\lambda_2| < \lambda_1$.

Лемма 3. *У системы* $M_\lambda^2|M_\mu|1|\infty$ *при* $\rho < 1$ *стационарные вероятности случайного процесса* $\xi(t)$ *могут быть найдены по формулам*

$$p_k = (1 - \rho_0 \nu) \frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \tag{10}$$

где λ_1 *и* λ_2 *определяются равенством* (9) *из леммы 2.*

Доказательство. Для функции $P(z)$ справедливы следующие алгебраические преобразования

$$P(z) = \frac{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_1 z} - \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_2 z} \right] =$$

$$= \frac{1 - \rho_0 \nu}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\lambda_1 \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_1 z)^k - \lambda_2 \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_2 z)^k \right] =$$

$$= (1 - \rho_0 \nu) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) z^k.$$

Сравнивая последнее представление $P(z)$ с его определением $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$, получаем (10). Лемма доказана.

Замечание 2. *Из формулы* (10) *видно, что распределение для вероятностей* p_k *задаётся с точностью до нормирующего множителя формулой Бине.*

Последние две леммы позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 2. *У системы $M_\lambda^2|M_\mu|1|\infty$ при $\rho < 1$ существует стационарное распределение процесса $\xi(t)$. При этом стационарные вероятности могут быть найдены по формулам*

$$p_k = (1-\rho_0\nu)\rho_0^k S_k\left(\frac{\alpha_2}{\rho_0}\right), \tag{11}$$

где $S_k(z)$ – многочлены определяемые равенством (5).

Доказательство. Как нетрудно заметить, леммы 3 и 2 с учётом представления Бине (6) позволяют написать следующую цепочку равенств

$$p_k = (1-\rho_0\nu)\frac{\lambda_1^{k+1}-\lambda_2^{k+1}}{\lambda_1-\lambda_2} = (1-\rho_0\nu)\rho_0^k\frac{\phi_1^{k+1}-\phi_2^{k+1}}{\phi_1-\phi_2} =$$

$$= (1-\rho_0\nu)\rho_0^k S_k\left(\frac{\alpha_2}{\rho_0}\right),$$

которая и завершает доказательство теоремы.

Хорошо известно [1, с. 113], что стационарные вероятности системы $M_\lambda|M_\mu|1|\infty$ имеют геометрическое распределение

$$p_k = (1-\rho_0)\rho_0^k,\ k = 0, 1, \dots . \tag{12}$$

Поскольку для системы $M_\lambda|M_\mu|1|\infty$ среднее число заявок в группе равно единице, т.е. $\nu = 1$, а $\alpha_2 = 0$, то формула (11) в этом случае в силу равенства $S_k\left(\frac{\alpha_2}{\rho_0}\right) = S_k(0) = 1$ согласуются с представлением (12).

В заключении данного пункта отметим, что более подробно формулу (11) можно представить в виде

$$p_k = (1-\rho_0\nu)\rho_0^k\left(1 + \sum_{j=1}^{\lfloor k/2\rfloor} C_{k-j}^j\left(\frac{\alpha_2}{\rho_0}\right)^j\right).$$

3.2. ОДИН ЧАСТНЫЙ ВИД СИСТЕМЫ $M_\lambda^2|M_\mu|1|\infty$

В силу представления $u_{k+1} = S_k(1)$ чисел Фибоначчи через многочлены $S_k(z)$ в единице частный вид формулы (11) оказывается также связанным с числами Фибоначчи. Очевидно, что для этого достаточно рассмотреть представление (11) при

$$\frac{\alpha_2}{\rho_0} = 1.$$

Для системы $M_\lambda^2|M_\mu|1|\infty$ из условия $\rho < 1$ следует неравенство

$$0 \leqslant \frac{\alpha_2}{\rho_0} < \frac{1-\rho_0}{\rho_0^2},$$

из которого с учётом неравенства $0 < \rho_0 < 1$ следует, что величина $z = \alpha_2/\rho_0$ может принимать любые неотрицательные значения. В частности и единичное.

При этом ограничение $0 < \rho_0 < 1$ также следует из неравенства $\rho < 1$. Действительно, условие на загрузку системы $\rho < 1$ с учётом представления $\nu = 1 + \alpha_2$ может быть записано в виде $(1+\alpha_2)\rho_0 < 1$. Последнее неравенство показывает, что ρ_0 не может превышать 1 при $0 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1$.

Остаётся вопрос при каких значениях α_2 (или, что то же самое, ρ_0) возможно существование стационарных вероятностей p_k. Как нетрудно понять, ограничения могут возникнуть только из условия на нагрузку системы. Следующая лемма даёт ответ на поставленный вопрос.

Лемма 4. *При $\alpha_2 = \rho_0$ условие на нагрузку $\rho < 1$ принимает вид $0 < \rho_0 < \left|\hat{\phi}\right|$, где $\hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.*

Доказательство. Чтобы вероятности (11) существовали, должно выполняться условие на загрузку системы $\rho < 1$. К тому же при $\rho_0 = \alpha_2$ условие $\rho < 1$ может быть представлено в виде неравенства

$$\alpha_2^2 + \alpha_2 - 1 < 0.$$

Откуда для $0 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1$ при $\rho_0 = \alpha_2$ условие на нагрузку системы принимает вид

$$0 < \alpha_2 = \rho_0 < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1,$$

иначе данное равенство можно записать в виде $\rho_0 < |\lambda_2|$ или $\rho_0 < \left|\hat{\phi}\right|$. Следовательно, лемма доказана.

С учётом ограничений из леммы 4 при условии $\alpha_2 = \rho_0$ из (11) в силу равенства $S_k(1) = u_{k+1}$ получаем представление для стационарных вероятностей системы $M_\lambda^2|M_\mu|1|\infty$ через числа Фибоначчи. Оформим данный результат в виде следующей теоремы.

Теорема 3. *Для стационарных вероятностей p_k системы массового обслуживания $M_\lambda^2|M_\mu|1|\infty$ при условии $\alpha_2 = \rho_0$ и $\rho_0 < \left|\hat{\phi}\right|$ справедливо представление через числа Фибоначчи*

$$p_k = (1-\rho_0\nu)\rho_0^k u_{k+1}, \tag{13}$$

где u_k – числа Фибоначчи, а $\hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из леммы 4 и того, что при $\alpha_2 = \rho_0$ верно равенство $S_k\left(\frac{\alpha_2}{\rho_0}\right) = S_k(1) = u_{k+1}$ и его следствие

$$p_k = (1-\rho_0\nu)\rho_0^k S_k\left(\frac{\alpha_2}{\rho_0}\right) = (1-\rho_0\nu)\rho_0^k u_{k+1}.$$

Теорема доказана.

3.3. О ПРИБЛЕЖЕНИИ К ГЕОМЕТРИЧЕСКОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ

Полученное выше (11) распределение стационарных вероятностей p_k при определённых условиях мало отличаются от геометрического распределения. То есть в этом случае искомые стационарные вероятности системы $M_\lambda^2|M_\mu|1|\infty$ асимптотически имеют такой же вид распределения, как и соответствующие им вероятности системы $M_\lambda|M_\mu|1|\infty$.

Рассмотрим данный вопрос подробнее. Начнём с частного случая $\alpha_2 = \rho_0$. Нам понадобится одно следствие из теоремы 3.

Следствие 1. *Для стационарных вероятностей системы $M_\lambda^2|M_\mu|1|\infty$ при условий $\alpha_2 = \rho_0$ и $\rho_0 < \left|\hat{\phi}\right|$ справедливо представление*

$$p_k = (1-\rho_0\nu)\rho_0^k \frac{\phi^{k+1} - \hat{\phi}^{k+1}}{\phi - \hat{\phi}}, \tag{14}$$

где

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Доказательство. Доказательство данного следствия получается из сопоставления представления (13) и формулы Бине для чисел Фибоначчи [2, с. 24]

$$u_k = \frac{\phi^k - \hat{\phi}^k}{\phi - \hat{\phi}}.$$

Доказательство следствия закончено.

Теорема 4. *В системе $M_\lambda^2|M_\mu|1|\infty$ при выполнении условий $\alpha_2 = \rho_0$ и $\rho_0 < \left|\hat{\phi}\right|$ вероятности p_k имеют асимптотически геометрическое распределение:*

$$p_k \approx \frac{1 - \rho_0 \nu}{\sqrt{5}} \phi (\rho_0 \phi)^k.$$

Доказательство. Представление (14) для вероятностей p_k состоит из произведения «геометрического распределения» $(1 - \rho_0\nu)\rho_0^k$ и «формулы Бине» $\frac{\phi^{k+1} - \hat{\phi}^{k+1}}{\phi - \hat{\phi}}$, в которой $\hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ по модулю строго меньше $\frac{5}{8}$. Поэтому величина $\hat{\phi}^{k+1} = (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{k+1}$ экспоненциально быстро стремится к нулю с ростом k, и, как следствие, при больших k число Фибоначчи u_k близко к $\phi^k/\sqrt{5}$, т.е.

$$\frac{\phi^{k+1} - \hat{\phi}^{k+1}}{\phi - \hat{\phi}} \approx \frac{\phi^{k+1}}{\sqrt{5}}.$$

Очевидно, что для разности двух последних величин справедлива оценка

$$\frac{\phi^{k+1}}{\sqrt{5}} - \frac{\phi^{k+1} - \hat{\phi}^{k+1}}{\phi - \hat{\phi}} \leqslant \frac{\hat{\phi}^{k+1}}{\sqrt{5}} < \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{5}{8}\right)^{k+1}.$$

Как показано в лемме 4, при $\alpha_2 = \rho_0$ условие существования стационарных вероятностей $\rho < 1$ принимат вид $0 < \rho < \left|\hat{\phi}\right|$. Данным замечанием заканчивается доказательство теоремы.

В общем случае также существует аналогичное свойство. Для его доказательства нам понадобится представление для вероятностей p_k, которое возникло в ходе доказательства теоремы 2. Укажем его явно в следующем следствии теоремы 2.

Следствие 2. *Для стационарных вероятностей системы* $M_\lambda^2|M_\mu|1|\infty$ *при условии* $\rho < 1$ *справедливо представление*

$$p_k = (1-\rho_0\nu)\rho_0^k \frac{\phi_1^{k+1} - \phi_2^{k+1}}{\phi_1 - \phi_2}\,, \tag{15}$$

где

$$\phi_1 = \frac{1+\sqrt{1+4\frac{\alpha_2}{\rho_0}}}{2}, \qquad \phi_2 = \frac{1-\sqrt{1+4\frac{\alpha_2}{\rho_0}}}{2}.$$

Данное следствие будет использовано в следующей теореме.

Теорема 5. *В системе* $M_\lambda^2|M_\mu|1|\infty$ *при выполнении условий* $\alpha_2 < \min\left(2\rho_0; \frac{1}{\rho_0} - \rho_0\right)$ *и* $0 < \rho_0 < 1$ *вероятности* p_k *имеют асимптотически геометрическое распределение:*

$$p_k \approx \frac{1-\rho_0\nu}{1-\phi_2/\phi_1}(\rho_0\phi_1)^k.$$

Доказательство. Поскольку в общем случае справедлива формула (15)

$$p_k = (1-\rho_0\nu)\rho_0^k \frac{\phi_1^{k+1} - \phi_2^{k+1}}{\phi_1 - \phi_2},$$

которая есть обобщение формулы (14), то доказательство будет повторять доказательство предыдущей теоремы с той разницей, что вместо автоматически выполняющегося условия $\left|\hat{\phi}\right| < 1$ появляется ограничение $|\phi_2| < 1$. Легко проверить, что последнее неравенство выполняется, если $\alpha_2 < 2\rho_0$. Действительно, неравенство $|\phi_2| < 1$ можно записать в виде

$$\frac{\sqrt{1+4\frac{\alpha_2}{\rho_0}} - 1}{2} < 1,$$

из которого с учётом неотрицательности α_2 и положительности ρ_0 элементарными алгебраическими преобразованиями привести к виду $\alpha_2 < 2\rho_0$.

С другой стороны, условие существования стационарных вероятностей $(1+\alpha_2)\rho_0 < 1$ можно переписать в виде $\alpha_2 < \frac{1}{\rho_0} - \rho_0$.

Объединяя оба условия на α_2 с учётом неравенства $0 < \rho_0 < 1$, получаем нужное ограничение. На этом доказательство теоремы завершено.

4. Биномиальные равенства и числа Фибоначчи

4.1. СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И ОДНО БИНОМИАЛЬНОЕ РАВЕНСТВО

Теорему 2 можно было бы доказать не используя свойств обобщённого биномиального ряда [3, с. 256] в виде формулы Бине. Но при этом возникает необходимость в доказательстве биномиального равенства (16). Далее проведём доказательство утверждения теоремы 2 с помощью простых алгебраических преобразований до места, в котором будет необходимо использовать биномиальное равенство (16). Применение равенства (если считать его доказанным [12, с. 87]) является последним шагом по превращению доказательства теоремы 6 в доказательство теоремы 2. Мы же, зная ответ и сравнивая его с последней формулой из доказательства теоремы 6, достаточно просто докажем справедливость самого равенства (16).

Теорема 6. *Для* $0 \leqslant j \leqslant \lfloor k/2 \rfloor$ *верно равенство*

$$\sum_{l=j}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_{k+1}^{2l+1} C_l^j = 2^{k-2j} C_{k-j}^j. \tag{16}$$

Доказательство. Для удобства определим число

$$b = \sqrt{1 + \frac{4\alpha_2}{\rho_0}}.$$

Тогда корни (9) могут быть выписаны через b:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\rho_0}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\alpha_2}{\rho_0}}\right) = \frac{\rho_0}{2}(1 \pm b),$$

а производящая функция $P(z)$ – в виде

$$P(z) = (1 - \rho_0\nu)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) z^k =$$

$$= \frac{1-\rho_0\nu}{\rho_0 b}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\rho_0}{2}\right)^{k+1}((1+b)^{k+1}-(1-b)^{k+1})z^k.$$

Из последнего равенства следует справедливость представления

$$p_k = \frac{1-\rho_0\nu}{\rho_0 b}\left(\frac{\rho_0}{2}\right)^{k+1}\left[(1+b)^{k+1}-(1-b)^{k+1}\right],$$

которое допускает следующие преобразования

$$p_k = \frac{1-\rho_0\nu}{\rho_0 b}\left(\frac{\rho_0}{2}\right)^{k+1}\left[\sum_{l=0}^{k+1}C_{k+1}^l b^l - \sum_{l=0}^{k+1}C_{k+1}^l(-b)^l\right] =$$

$$= \frac{1-\rho_0\nu}{\rho_0 b}\left(\frac{\rho_0}{2}\right)^{k+1}\left[\sum_{l=0}^{\lfloor k/2\rfloor}2C_{k+1}^{2l+1}b^{2l+1}\right] =$$

$$= (1-\rho_0\nu)\left(\frac{\rho_0}{2}\right)^{k}\left[\sum_{l=0}^{\lfloor k/2\rfloor}C_{k+1}^{2l+1}b^{2l}\right].$$

Подставляя в последнее равенство значение $b = \sqrt{1+\frac{4\alpha_2}{\rho_0}}$ и делая элементарные алгебраические операции, находим явный вид вероятностей искомого распределения

$$p_k = (1-\rho_0\nu)\left(\frac{\rho_0}{2}\right)^{k}\left[\sum_{l=0}^{\lfloor k/2\rfloor}C_{k+1}^{2l+1}\left(1+\frac{4\alpha_2}{\rho_0}\right)^l\right] =$$

$$= (1-\rho_0\nu)\left(\frac{\rho_0}{2}\right)^{k}\left[\sum_{l=0}^{\lfloor k/2\rfloor}C_{k+1}^{2l+1}\sum_{j=0}^{l}C_l^j\left(\frac{4\alpha_2}{\rho_0}\right)^j\right] =$$

$$= (1-\rho_0\nu)\left(\frac{\rho_0}{2}\right)^{k}\left[\sum_{l=0}^{\lfloor k/2\rfloor}\sum_{j=0}^{l}C_{k+1}^{2l+1}C_l^j\left(\frac{4\alpha_2}{\rho_0}\right)^j\right] =$$

$$= (1-\rho_0\nu)\rho_0^k\left[\sum_{j=0}^{\lfloor k/2\rfloor}\sum_{l=j}^{\lfloor k/2\rfloor}2^{2j-k}C_{k+1}^{2l+1}C_l^j\left(\frac{\alpha_2}{\rho_0}\right)^j\right].$$

Сравнивая правую часть последней формулы для p_k с представлением (11), убеждаемся в справедливости теоремы.

4.2. ОДНО ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ

Из (16) для чисел Фибоначчи легко получить представление через двойную сумму

$$u_{k+1} = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} 2^{2j-k} \sum_{l=j}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_{k+1}^{2l+1} C_l^j. \tag{17}$$

Действительно,

$$u_{k+1} = S_k(1) = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_{k-j}^j = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} 2^{2j-k} \sum_{l=j}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_{k+1}^{2l+1} C_l^j.$$

Из (17) после изменения порядка суммирования

$$u_{k+1} = 2^{-k} \sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} C_{k+1}^{2l+1} \sum_{j=0}^{l} 4^j C_l^j$$

получается представление Каталана

$$u_{k+1} = 2^{-k} \sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} 5^l C_{k+1}^{2l+1}.$$

Таким образом, из (17) получается представление Каталана и формула Лукаса.

4.3. ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ

Связь чисел Фибоначчи с вероятностями позволяет вероятностным способом достаточно быстро получить формулу для производящей функции чисел Фибоначчи.

Поскольку $p_k = (1 - \rho_0 \nu) u_{k+1} \rho_0^k$ суть вероятности, то их сумма равна единице, т.е. справедливо равенство

$$(1 - \rho_0 \nu) \sum_{k=0}^{\infty} u_{k+1} \rho_0^k = 1.$$

Последнее тождество с учётом равенств $\nu = 1 + \alpha_2$, $\rho_0 = \alpha_2$, $u_0 = 0$ после замены $x = \alpha_2$ легко приводится к виду

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = \frac{x}{(1 - x - x^2)}.$$

5. Заключение

В данной работе в рамках системы $M_\lambda^2|M_\mu|1|\infty$ найдено алгебраическое представление (11) для вероятностей стационарного процесса $\xi(t)$, из которого видно, что данные вероятности зависят от α_2 и при $\alpha_2 = 0$ совпадают с соответствующими вероятностями системы $M_\lambda|M_\mu|1|\infty$. Отличие заключается в появлении членов вида $\left(\frac{\alpha_2}{\rho_0}\right)^k$, где $\rho_0 = \frac{\lambda}{\mu}$, а $k \in \mathbb{N}$. При этом коэффициенты перед данными слагаемыми являются натуральными числами.

Поскольку полученное распределение содержит обобщённые многочлены Фибоначчи, то в частном случае появляется распределение содержащие числа Фибоначчи.

Литература

1. БОЧАРОВ П.П., ПЕЧИНКИН А.В. *Теория массового обслуживания*. – М.: РУДН,1995. – 529 с.
2. ВОРОБЬЁВ Н.Н. *Числа Фибоначчи*. – М.: Наука, 1992. – 192 с.
3. ГРЭХЕМ Р., КНУТ Д., ПАТАШНИК О. *Конкретная математика. Основание информатики*. – М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2010. – 784 с.
4. ПРОСОЛОВ В.В. *Многочлены*. – М.: МЦНМО, 2001. – 336 с.
5. СОБОЛЕВ В.Н. *О законе стационарной очереди для одной системы массового обслуживания с групповым поступлением требований* // Управление большими системами: Сборник трудов. Вып. 77. – М.: ИПУ РАН, 2019. – С. 6–19.
6. СОЛОВЬЁВ А.Д., СОБОЛЕВ В.Н. *Одна система массового обслуживания с групповым поступлением требований* // Аналитические и вычислительные методы в теории вероятностей и её приложениях (АВМТВ-2017): материалы Международной научной конференции. Россия, Москва, 23-27 октября 2017. / Под общ. ред. А. В. Лебедев]. – М.: Изд-во «РУДН», 2017. – 743 с.

7. DJORDJEVIC G.B., MILOVANOVIC G.V. *Special classes of polynomials*. – Leskovac: University of Nis, 2014. – 219 p.
8. HORADAM A.F. *Basic Properties of Certain Generalized Sequence of Numbers* // The Fibonacci Quarterly – 1965. – Vol. 3, No. 3. – P. 161–176.
9. HORADAM A.F. *, Extension of a synthesis for a class of polynomial sequences* // The Fibonacci Quarterly – 1996. – Vol. 34, No. 1. – P. 68–74.
10. HORADAM A.F. *A Synthesis of Certain Polynomial Sequences* // In: Applications of Fibonacci Numbers / Eds.: Bergum G.E., Philippou A.N., Horadam A.F. – Dordrecht: Springer, 1996. – 540 p.
11. LUCAS E. *Theorie des Fonctions Numeriques Simplement Periodiques [Continued]* // American Journal of Mathematics – 1878. – Vol. 1, No. 3. – P. 197–240.
12. RIORDAN J. *Combinatorial Identities*. – New York: R.E. Krieger Pub. Co., 1979. – 256 p.
13. SOLOVIEV A.D., SOBOLEV V.N. *One Server Queue with Bulk Arrivals* // In: Analytical and Computational Methods in Probability Theory. ACMPT 2017. Lecture Notes in Computer Science. Vol 10684. / Eds.: Rykov V., Singpurwalla N., Zubkov A. – Cham: Springer, 2017. – 540 p.
14. SUN Y. *, Numerical triangles and several classical sequences* // The Fibonacci Quarterly. – 1966. – Vol. 43, No. 4. – P. 359–370.
15. VAJDA S. *Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section Theory and Applications*. – Chichester: Ellis Horwood limited Publishers, 1989. – 190 p.

ONE QUEUEING SYSTEM AND FIBONACCI NUMBERS

Vitaly Sobolev, Moscow, Cand.Sc., free researcher (sobolev_vn@mail.ru).

Abstract: This paper deals with a queuing system with Poisson arrivals, exponential service times, single service channel and infinite number of waiting positions, customers are serviced in the order of their arrival. The requests arrives in groups and the number of requests in a group is one or two. For this queueing system be found in algebraic form the steady-state probabilities for the number of customers in the system. A probability mass function of this distribution can be defined by polynomials like polynomials Fibonacci. The geometric distribution is a special case of this distribution. Fibonacci numbers can be expressed in terms of the polynomials like polynomials Fibonacci. Consequently our distribution expressed in terms of this polynomials under certain conditions can be written in terms of Fibonacci numbers. Using the Binet formula is shown that in some cases the found distribution is asymptotically geometric distribution. In this paper it is shown that the Bernoulli numbers can be expressed as an elementary double sum of binomial coefficients. Changing the order in that double sum and summing one of them get a formula for Fibonacci numbers which Catalan developed or Lucas formula for Fibonacci numbers.

Keywords: queueing system, batch arrivals, stationary distribution, probability generating functions, Fibonacci numbers, binomial coefficients, sums of binomial coefficients, Fibonacci sequence, Generalized Fibonacci polynomials, Binet's Fibonacci number formula, Generalized Fibonacci numbers, Binet form, generating function, generating function for a Fibonacci numbers, geometric distribution, Pisot number.

УДК 519.872
ББК 22.171

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Э.Ю. Калимулиной.

Поступила в редакцию 25.03.2019.
Дата опубликования 31.07.2019.