ОБ ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛОСКОСТИ

Турцынский М. К.[1]

(*Российский университет транспорта (РУТ МИИТ), Москва*)

Рассмотрена двумерная по пространству система уравнений идеального политропного газа на вращающейся плоскости, возникающая в задачах динамики атмосферы. В общей постановке система очень сложна, однако она допускает решения с линейным по пространственным переменным профилем скорости (отвечающим движениям с однородной деформацией), нахождение которых сводится к решению квадратично-нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта система обладает двумя семействами особых точек: однопараметрическим вихревым и двупараметрическим, отвечающим сдвиговому течению газа, которое всегда является неустойчивым. Устойчивость этих особых точек означает устойчивость стационарных решений исходной системы в классе возмущений с линейным профилем скорости. В работе исследуется однопараметрическое семейство особых точек, отвечающее стационарному вихревому движению, параметр отвечает интенсивности вихря и может изменяться на всей действительной оси. Ранее были найдены промежутки изменения параметра, в которых имеет место неустойчивость, а также устойчивость по Ляпунову. Эти промежутки, однако, не покрывали всю действительную ось. Для оставшихся интервалов матрица линеаризации имеет три пары комплексно-сопряженных собственных значений с нулевыми действительными частями, поэтому исследование устойчивости традиционными методами затруднено. Мы исследуем этот вопрос при помощи перехода в лагранжевы координаты. Удается построить оценки, которые дают интервалы гарантированной устойчивости. Для газа с одной, двумя и тремя степенями свободы вопрос об устойчивости решен полностью.

Ключевые слова: идеальный политропный газ, движение с однородной деформацией, положения равновесия.

1. Введение и постановка задачи

Рассматривается система уравнений в частных производных, задающая движение идеального политропного газа на плоскости

---

[1] *Марко Казимирович Турцынский, ассистент* (*M13041@yandex.ru*).

в поле силы Кориолиса:

$$(1)\qquad \varrho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \mathcal{L}\mathbf{u}) + \nabla p = 0, \quad \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho\mathbf{u}) = 0,$$
$$\partial_t p + (\mathbf{u}\cdot\nabla p) + \gamma p \operatorname{div}\mathbf{u} = 0.$$

Здесь $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$, $\varrho(t,\mathbf{x})$ и $p(t,\mathbf{x})$ – скорость, плотность и давление газа соответственно; $\mathcal{L} = lL$, $L = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $l = \mathrm{const} > 0$ – параметр Кориолиса; ∇ и div – градиент и дивергенция по пространственным переменным; $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$; $\gamma \in [1,2]$ – показатель адиабаты.

Эта система возникает в задачах динамики атмосферы. Она получается из трехмерной модели путем осреднения по вертикальной координате (в предположении, что вертикальный масштаб процессов существенно мал по сравнению с горизонтальным, [5, 18]). Системы уравнений такого рода сложны для изучения в общем случае, часто (например, в задачах механики сплошных сред) рассматривают подклассы решений с линейным профилем скорости

$$\mathbf{u}(t,\,\mathbf{x}) = Q(t)\mathbf{x}, \quad Q = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}.$$

В таком случае система уравнений в частных производных (1) может быть сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, исследование которой значительно упрощает задачу [14–17]:

$$(2)\quad \dot{R} + RQ + Q^T R + (\gamma-1)\mathrm{tr}QR = 0, \quad \dot{Q} + Q^2 + \mathcal{L}Q + 2c_0 R = 0.$$

Здесь симметрическая матрица $R = R(t) = \begin{pmatrix} A(t) & \frac{1}{2}B(t) \\ \frac{1}{2}B(t) & C(t) \end{pmatrix}$ описывает распределение плотности и давления внутри материального объема газа, $c_0 = \mathrm{const}$.

Система (2) давно изучалась в двумерном и трехмерном случаях при отсутствии вращения в эйлеровых и лагранжевых координатах. В частности, в работе Г. Дирихле [9] для несжимаемого случая были найдены первые интегралы системы; сжимаемый случай впервые рассматривался в работе Л.В. Овсянникова [6], где была дана классификация случаев интегрируемости системы. Работы последнего продолжались работами Д. Линденбелла [13] и Я.Б. Зельдовича [4] по расширению газового эллипсоида в вакууме, работой Ф. Дайсона [3], где рассматривался случай изотермического течения без предположения о политропности газа. Далее последовал цикл работ Б. Гаффэ [10–12], где найдены первые интегралы, исследована интегрируемость для случая одноатомного газа ($\gamma = \frac{5}{3}$). Большое число результатов содержится в книге О.И. Богоявленского [2], где, в частности, получен лагранжев вид системы (2), приведены примеры распределений плотности и давления газа. Результаты были по большей части получены в лагранжевых координатах.

В работах О.С. Розановой [14, 15], О.С. Розановой и автора настоящей статьи [16, 17] данная модель исследовалась для случая $l > 0$, рассматривались ее особые точки. В механике сплошных сред они соответствуют стационарным состояния газа. Было показано, что система имеет особую точку, отвечающую вихревому движению:

(3) $$a = d = 0,\ b = -c = b^*,\ A = C = \frac{b^*(b^*-l)}{2c_0},\ B = 0,$$

и две особые точки, отвечающие сдвиговому течению, которые являются неустойчивыми. Там же в эйлеровых координатах было показано, что при $b^* \in (0, l)$ особая точка, отвечающая вихревому движению, является устойчивой по Ляпунову, при $b^* \in \mathbb{R}/[\frac{1-\sqrt{2}}{2}l, \frac{1+\sqrt{2}}{2}l]$ – неустойчивой. На оставшихся интервалах $b^* \in (\frac{1-\sqrt{2}}{2}l, 0) \cup (l, \frac{1+\sqrt{2}}{2}l)$ собственные значения матрицы линейного приближения имеют 3 пары чисто мнимых комплексно-сопряженных значений, и теория линейного приближения неприменима. Исследование устойчивости возможно при помощи метода нормальных форм, основанном на критерии Бибикова [7]. Однако этот метод, при котором нужно вычислить действительную часть некоторой функции, может быть реализован только численно-аналитически при помощи методов компьютерной алгебры. Из равенства нулю действительной части этой функции вытекает существование почти-периодических решений вблизи малой окрестности особой точки. В результате счета, однако, получаются очень малые, но не тождественно равные нулю величины, которые вычисляются в достаточно большом, но конечном числе точек. Особенно проблематичны вычисления по мере приближения к границам исследуемого промежутка, где алгоритм содержит отношение двух очень малых величин. Поэтому вопрос об устойчивости особых точек на интервале, где в принципе возможно появление неустойчивости из-за резонансных частот, не может считаться решенным.

Переходом в лагранжевы координаты для $\gamma = 2$ удалось строго доказать [8], что особая точка (3) является устойчивой на всем интервале $b^* \in (\frac{1-\sqrt{2}}{2}l,\ 0) \cup (l,\ \frac{1+\sqrt{2}}{2}l)$, для остальных значений показателя адиабаты $\gamma \in [1,\ 2)$ вопрос оставался открытым.

В настоящей работе получены интервалы устойчивости особой точки (3) для $\gamma \in [1, 2)$ на оставшихся неисследованными интервалах $b^* \in (\frac{1-\sqrt{2}}{2}l,\ 0) \cup (l, \frac{1+\sqrt{2}}{2}l)$. В частности, показано, что при $\gamma = \frac{3}{2},\ \frac{5}{3}$ особая точка является устойчивой на всем интервале $b^* \in (\frac{1-\sqrt{2}}{2}l, \frac{1+\sqrt{2}}{2}l)$.

Отметим, что условие линейного профиля скорости в эйлеровых координатах соответствует условию однородной деформации поля скорости в лагранжевых [2], т.е. $\mathbf{x}(t, \mathbf{w}) = F(t)\mathbf{w}$, где $F = (F_{ik})_{i,k=1..2}$ – матрица перехода от лагранжевых координат частицы газа $\mathbf{w}$ к эйлеровым $\mathbf{x}$. Аналогом (2) в этом случае будет система матричных уравнений

$$\ddot{F}_{ik} + \frac{\partial U}{\partial F_{ik}} + \sum_j \mathcal{L}_{ij}\dot{F}_{jk} = 0. \tag{4}$$

Здесь U – внутренняя энергия частиц газа, $U = U_0|\det F|^{-\gamma}\det F$ для $1 < \gamma \leqslant 2$, $U = -U_0 \operatorname{sgn}(\det F) \ln|\det F|$ для $\gamma = 1$, $U_0 = \mathrm{const}$, F считается невырожденной матрицей, производные берутся по времени. Для $l = 0$ в работе С.И. Анисимова и Ю.И. Лысикова [1] были найдены первые интегралы системы (4):

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\sum_{i,k}(\dot{F}_{ik})^2 + U = E = \mathrm{const},\\ F_{11}\dot{F}_{21} + F_{12}\dot{F}_{22} - F_{21}\dot{F}_{11} - F_{22}\dot{F}_{12} = J = \mathrm{const},\\ F_{11}\dot{F}_{12} + F_{21}\dot{F}_{22} - F_{12}\dot{F}_{11} - F_{22}\dot{F}_{21} = K = \mathrm{const},\end{gathered} \tag{5}$$

причем для $\gamma = 2$ существует дополнительный первый интеграл $G = \sum_{i,k=1}^{2} F_{ik}^2 = \mathrm{const}$.

2. Устойчивость особой точки для $1 < \gamma \leqslant 2$

В данном разделе мы получим оценки, которые используются в дальнейшем для нахождения интервалов устойчивости особой точки (3). Всюду здесь и далее мы будем предполагать, что $b^* \in (\frac{1-\sqrt{2}}{2}l,\, 0) \cup (l,\, \frac{1+\sqrt{2}}{2}l)$, так как при остальных значениях b^* вопрос устойчивости решен. Нам понадобятся три леммы, приведенные в [8]:

Лемма 1. *Система (4) имеет три первых интеграла:*

$$E = \mathrm{const}, \quad J + \frac{l}{2}G = A = \mathrm{const}, \qquad (6)$$
$$K - l \det F = B = \mathrm{const}.$$

При $\gamma = 2$ имеется дополнительный первый интеграл:

$$G = M \sin(lt + \phi_0) + \tfrac{4E+2lA}{l^2}, \qquad (7)$$

величины E, J, K, G определены в (5).

Лемма 2. *Замена*

$$\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s\cos u & 0 \\ 0 & s\sin u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos w & -\sin w \\ \sin w & \cos w \end{pmatrix} \qquad (8)$$

приводит систему первых интегралов (6)–(7) к дифференциальному уравнению

$$\dot{u} = \pm\sqrt{f(u,s)}, \qquad (9)$$

где $f(u,s) = \frac{2E-\dot{s}^2+Al}{s^2} - \frac{l^2}{4} - \frac{2^\gamma U_0 \sin 2u}{s^{2\gamma}|\sin 2u|^\gamma} - \frac{A^2+B^2+2AB\sin 2u}{s^4\cos^2 2u}$,
$\gamma \in (1,2]$

Лемма 3. *Для $\gamma \in (1,2]$ в положении равновесия (3) имеют место равенства (звездочками обозначены значения соответствующих функций в положении равновесия):*

$$\det F^* = -\left(\tfrac{U_0(\gamma-1)}{b^*(b^*-l)}\right)^{\frac{1}{\gamma}},\ G^* = -2\det F^*,\ J^* = K^* = -b^* G^*, \qquad (10)$$
$$E^* = \det F^*(-(b^*)^2 + \tfrac{b^*(l-b^*)}{\gamma-1}),\ A^* = B^* = \det F^*(2b^* - l).$$

Также известно [8], что при наших предположениях положение равновесия (3) соответствует $r = \sin 2u = -1$.

Получим необходимые оценки. Уравнение (9) перепишем в виде

$$\tfrac{\dot{r}^2}{4} = \tfrac{2E-\dot{s}^2+Al}{s^2}(1-r^2) - \tfrac{l^2(1-r^2)}{4} - \qquad (11)$$
$$\tfrac{2^\gamma U_0 r|r|^{-\gamma}}{s^{2\gamma}}(1-r^2) - \tfrac{A^2+B^2+2ABr}{s^4},$$

откуда имеем

$$\text{(12)}\qquad \frac{\dot r^2}{4} \leqslant \frac{K_\gamma(r)}{S^\gamma} - \frac{K_2(r)}{S^2} + \frac{K_1(r)}{S} - K_0(r) \equiv \psi(r,S).$$

Здесь $S = s^2 > 0$,

$$K_\gamma(r) = \tfrac{2^\gamma U_0(1-r^2)}{(-r)^{\gamma-1}} \geqslant 0, \quad K_0(r) = \tfrac{l^2}{4}(1-r^2) \geqslant 0,$$

$$K_1(r) = (2E + Al)(1-r^2), \quad K_2(r) = A^2 + B^2 + 2ABr \geqslant 0.$$

Заметим, что коэффициенты $K_1(r)$, $K_2(r)$ зависят также от b^* (для краткости обозначений мы не будем добавлять b^* в аргументы K_i, i=1,2), так как от b^* зависят первые интегралы A, B, E.

От знака $K_1(r)$ будут зависеть оценки, которые мы приведем ниже. Несложно доказать, что $K_1(r) > 0$ при $b^* \in (\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\sqrt{-1+\frac{2}{2-\gamma}}, \frac{l}{2} + \frac{l}{2}\sqrt{-1+\frac{2}{2-\gamma}})$ (в частности, при $\gamma > \frac{4}{3}$); $K_1(r) < 0$ для остальных $b^* \in (\frac{1-\sqrt{2}}{2}l,\ 0) \cup (l,\ \frac{1+\sqrt{2}}{2}l)$. Доказательство получается непосредственной подстановкой равенств (10) в выражение для коэффициента $K_1(r)$. Мы также без ограничения общности положим здесь и далее, что $U_0 = l = 1$. Остановимся на основных неравенствах, которые приведут к доказательству теоремы о гарантированных интервалах устойчивости.

***Утверждение* 1.** *Если $K_1(r) > 0$, при $r < r^*$ имеет место неравенство:*

$$\text{(13)}\qquad \tfrac{(\dot r)^2}{4} \leqslant \psi_1^\gamma(r;\, b^*) \equiv -\tfrac{2^{\gamma-4}K_2(r)^{\gamma-2}K_1(r)^2}{f(r)} - K_0(r),$$

где r^* – корень уравнения $f(r) \equiv K_\gamma(r)K_1(r)^{\gamma-2} - 2^{\gamma-2}K_2(r)^{\gamma-1} = 0$ на $-1 < r < 0$.

Доказательство. Заметим, что при любом фиксированном r функция $\psi(r,S)$ имеет точку максимума S^*, удовлетворяющую уравнению

$$\psi'_S(r,S) = -\tfrac{\gamma K_\gamma}{S^{\gamma+1}} + \tfrac{2K_2}{S^3} - \tfrac{K_1}{S^2},$$

которое можно переписать в виде

$$\text{(14)}\qquad 2K_2 - K_1 S = \gamma K_\gamma S^{2-\gamma}.$$

Левая часть (14) убывает по S на $S \in [0,\ \frac{2K_2}{K_1}]$, правая часть (14) возрастает. Отсюда имеем, что точка максимума S^* лежит на отрезке $[0,\ \frac{2K_2}{K_1}]$.

Получим неравенство (13). Введем $\sigma = \frac{S^* K_1}{2K_2}$, тогда $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ для $S \in [0,\ \frac{2K_2}{K_1}]$ и отсюда имеем точку максимума $S^* = \frac{2K_2\sigma}{K_1}$. Так как для этих σ выполнено $\frac{1}{\sigma^\gamma} \leqslant \frac{1}{\sigma^2}$, из (12) получим:

$$\psi(r,S) \leqslant \psi(r,S^*) = \frac{K_\gamma(r)K_1(r)^\gamma}{2^\gamma K_2(r)^\gamma \sigma^\gamma} - \frac{K_1(r)^2}{4K_2(r)\sigma^2} + \frac{K_1(r)^2}{2K_2(r)\sigma} - K_0(r) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{K_\gamma K_1^\gamma}{2^\gamma K_2^\gamma} - \frac{K_1^2}{4K_2}\right)\frac{1}{\sigma^2} + \frac{K_1^2}{2K_2}\frac{1}{\sigma} - K_0 = \tilde{\psi}(r,\sigma). \tag{15}$$

Так как $\tilde{K}_2 = -\frac{K_\gamma K_1^\gamma}{2^\gamma K_2^\gamma} + \frac{K_1^2}{4K_2} = -\frac{K_1^2 f(r)}{2^\gamma K_2^\gamma} > 0$ для $r < r^*$ – корня уравнения $f(r) = 0$, мы можем продолжить неравенство (15):

$$\tilde{\psi}(r,\sigma) = -\frac{\tilde{K}_2}{\sigma^2} + \frac{\tilde{K}_1}{\sigma} - K_0 \leqslant \frac{\tilde{K}_1^2}{4\tilde{K}_2} - K_0 = -\frac{2^{\gamma-4}K_2(r)^{\gamma-2}K_1(r)^2}{f(r)} - K_0(r),$$

где $\tilde{K}_1 = \frac{K_1^2}{2K_2}$, $\sigma^* = \frac{2\tilde{K}_2}{\tilde{K}_1}$ – точка максимума $\tilde{\psi}(r,\sigma)$. Отсюда следует оценка (13).

Утверждение 2. *Если* $K_1(r) < 0$*, имеет место оценка*

$$\frac{(\dot{r})^2}{4} \leqslant \left(\frac{\gamma K_\gamma}{2}\right)^{\frac{2}{2-\gamma}} \cdot K_2^{-\frac{\gamma}{2-\gamma}}\left(\frac{2}{\gamma} - 1\right) - K_0 \equiv \psi_2^\gamma(r;\, b^*). \tag{16}$$

Доказательство. Заметим, что для $K_1(r) < 0$ из (12) будем иметь

$$\frac{(\dot{r})^2}{4} \leqslant \frac{K_\gamma(r)}{S^\gamma} - \frac{K_2(r)}{S^2} - K_0(r) \equiv \tilde{\psi}(r,S), \tag{17}$$

так как $S = s^2 > 0$. Аналогично утверждению 1 $\tilde{\psi}(r,S)$ имеет точку максимума S^*, которая удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\psi}'_S(r,S) = -\frac{\gamma K_\gamma}{S^{\gamma+1}} + \frac{2K_2}{S^3}.$$

Отсюда получим, что

$$S^* = \left(\frac{\gamma K_\gamma}{2K_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-2}}. \tag{18}$$

Продолжая неравенство (17), имеем

$$\tilde{\psi}(r,S) \leqslant \tilde{\psi}(r,S^*) = \frac{K_2}{(S^*)^2}\left(\frac{2}{\gamma} - 1\right) - K_0,$$

подставляя в которое выражение (18) получим требуемое.

Теперь мы можем сформулировать основной результат об устойчивости особой точки (3) для $1 < \gamma \leqslant 2$.

Теорема 1. *Пусть*

$$b_i^* = \sup_{b^* \in (1, \frac{1+\sqrt{2}}{2})} \{b^* |\, \psi_i^\gamma(r;\, b^*) = 0 \textit{ имеет решение на } r \in (-1,\, 0)\},$$

функции ψ_i^γ, $i = 1, 2$, *определены в утверждениях 1,2. Тогда:*

1. При $1 < \gamma < \frac{4}{3}$ *положение равновесия (3) устойчиво по Ляпунову для* $b^* \in (1 - b_2^*,\, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-1 + \frac{2}{2-\gamma}}) \cup (1 - b_1^*,\, 0) \cup (1,\, b_1^*) \cup$ $\cup (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-1 + \frac{2}{2-\gamma}}, b_2^*)$.

2. При $\gamma \geqslant \frac{4}{3}$ *(3) устойчиво по Ляпунову для* $b^* \in (1 - b_1^*,\, 0) \cup$ $\cup (1,\, b_1^*)$.

Доказательство. Предварительно заметим, что функция $\psi_i(r)$, $i = 1, 2$, положительна на участке $-1 < r < r^*$, r^* – корень уравнения $\psi_i^\gamma(r;\, b^*) = 0$ при указанных b^*. В силу оценок (13), (16) это означает, что имеется ограниченная область разрешенного движения, соответствующая уравнению (11), которая отделена от точки $r = 0$. Это свидетельствует о существовании периодического решения уравнения (11), так как при $r \to 0$ $\mathbf{u} = Q\mathbf{x}$ уходит на бесконечность (в самом деле, из условия замены (8) имеем $\det F = \frac{1}{2} s^2 r \to 0$ при $r \to 0$ и $Q = \dot{F} F^{-1}$). Покажем теперь, что (3) устойчива по Ляпунову. Возьмем малое возмущение начальных данных $F_{ij}(0)$, $\dot{F}_{ij}(0)$, $i, j = 1, 2$, в окрестности положения равновесия $r^* = -1$, тогда мы имеем малое возмущение коэффициентов $K_1(r)$, $K_2(r)$ (коэффициенты $K_0(r)$, $K_\gamma(r)$ при этом не меняются), которое приводит к малому изменению функций $\psi_i^\gamma(r;\, b^*)$, $i = 1, 2$, из оценок (13), (16) и их графиков. Возмущенное движение происходит в области $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, где $|r^* - r_1| < \varepsilon$, $|r^* - r_2| < \varepsilon$, откуда имеем $|r^* - r(t)| < \varepsilon$ и по определению получаем устойчивость $r^* = -1$. При отдельных значениях параметра γ удается получить доказательство устойчивости особой точки на всем множестве $b^* \in (\frac{1-\sqrt{2}}{2}, 0) \cup (1,\, \frac{1+\sqrt{2}}{2})$.

Теорема 2. *Положение равновесия (3) устойчиво по Ляпунову при всех* $b^* \in (\frac{1-\sqrt{2}}{2}, 0) \cup (1, \frac{1+\sqrt{2}}{2})$ *для* $\gamma = \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$.

Доказательство. Предварительно рассмотрим случай $\gamma = \frac{3}{2}$. Для $\gamma = \frac{3}{2} > \frac{4}{3}$ имеем $K_1(r) > 0$, и для доказательства мы можем использовать неравенство (13). Заметим, что в этом случае уравнение (14) на точку максимума S^* легко разрешить (оно сводится к квадратному), его точное решение имеет вид

$$S^*(r) = \left(\frac{-3K_{3/2} + \sqrt{9K_{3/2}^2 + 32K_1K_2}}{4K_1} \right)^2$$

Находя теперь вторую производную

$$\psi''_{rr}(S, r) = \frac{15K_{3/2}}{4S^{7/2}} - \frac{6K_2}{S^4} + \frac{2K_1}{S^3}$$

в положении равновесия $r = -1$, $S(r) = S^*(-1)$, получим (вычисления опущены в силу громоздкости):

$$\psi''_{rr}(-1, S^*(-1)) = 2(b^*)^2 - 2b^* - \tfrac{1}{2} = 2(b^* - \tfrac{1+\sqrt{2}}{2})(b^* + \tfrac{1+\sqrt{2}}{2}) < 0$$

для $b^* \in (\frac{1-\sqrt{2}}{2}, 0) \cup (1, \frac{1+\sqrt{2}}{2})$. Значит, функция $\psi(S, r)$ вогнута вниз в положении равновесия $r = -1$ и также будет вогнута вниз при малых возмущениях первых интегралов A, B, E и коэффициентов K_i, $i = 0, ..., 2$, $K_{3/2}$. Таким образом, в окрестности $r = -1$ имеется ограниченный участок движения, отделенный от $r = 0$. Отсюда следует существование периодического решения. Доказательство устойчивости особой точки $r = -1$ проводится совершенно аналогично доказательству, приведенному в теореме 1 для функции ψ_1^γ. Доказательство утверждения для $\gamma = \frac{5}{3}$ проводится аналогично, получается сводящееся к кубическому уравнение (14) на точку максимума S^*, которое может быть разрешено.

Результат исследования устойчивости на основании теорем 1, 2 представлен на рис. 1.

Замечание 1. Отметим также, что значения $\gamma = 2, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}$, для которых имеем доказательство устойчивости особой точки (3) на всем множестве $b^* \in (\frac{1-\sqrt{2}}{2}, 0) \cup (1, \frac{1+\sqrt{2}}{2})$, соответствуют показателю адиабаты $\gamma = 1 + \frac{2}{n+2}$ газов с $n = 0,\ 1,\ 2$ дополнительной степенями свободы молекулы в двумерном случае.

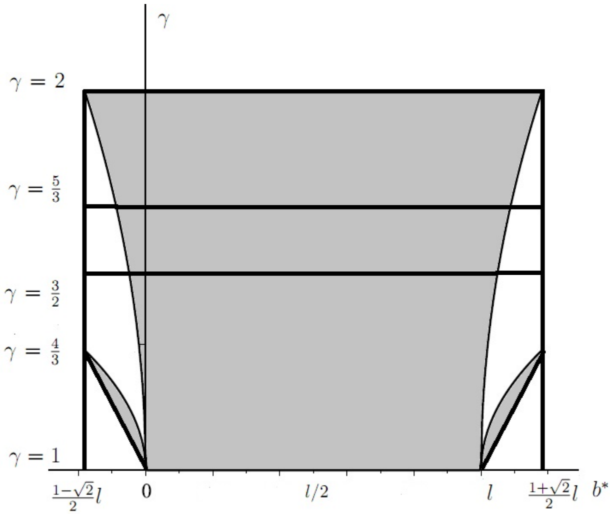

Рис. 1. Результат исследования устойчивости особой точки (3) на основании теорем 1,2. Серым отмечена область устойчивости

3. Устойчивость особой точки для $\gamma = 1$

Результаты этого раздела во многом базируются на идеях предыдущего. Здесь мы также получим оценку, которую будем использовать для нахождения интервалов устойчивости особой точки (3). Для дальнейшего изложения нам понадобятся две леммы, аналогичные леммам 2 и 3 (доказательства опущены).

Лемма 4. *Замена (8) приводит систему первых интегралов (6)–(7) к дифференциальному уравнению*

$$\dot{u} = \pm\sqrt{f(u,s)}, \tag{19}$$

где $f(u,s) = \frac{2E - \dot{s}^2 + Al}{s^2} - \frac{l^2}{4} - \frac{2U_0 \ln \frac{s^2|\sin 2u|}{2}}{s^2} - \frac{A^2+B^2+2AB\sin 2u}{s^4\cos^2 2u}$, $\gamma = 1$.

Лемма 5. *Для $\gamma = 1$ в положении равновесия (3) имеют место равенства (звездочками обозначены значения соответствующих функций в положении равновесия):*

$$\det F^* = -\tfrac{U_0}{b^*(b^*-l)},\ G^* = -2\det F^*,$$
$$J^* = K^* = -b^*G^*,\ A^* = B^* = (2b^* - l)\det F^* \tag{20}$$
$$E^* = -(b^*)^2\det F^* + U_0\ln(-\det F^*).$$

Обобщая результат [8], имеем, что $r = \sin 2u = -1$ соответствует положению равновесия (3) в данном случае.

Перейдем к получению оценки. Перепишем уравнение (19) в виде

$$\tfrac{\dot r^2}{4} = \tfrac{2E-\dot s^2+Al}{s^2}(1-r^2) - \tfrac{l^2(1-r^2)}{4} -$$
$$\tfrac{2U_0\ln(-\frac{s^2r}{2})}{s^2}(1-r^2) - \tfrac{A^2+B^2+2ABr}{s^4}.$$

Отсюда имеем

$$\tfrac{(\dot r)^2}{4} \leqslant -\tfrac{K_2+K_3S\ln S}{S^2} + \tfrac{K_1}{S} - K_0 \equiv \psi(r,S).$$

Здесь $S = s^2$, $K_3 = 2U_0(1-r^2) \geqslant 0$, $K_2 = A^2+B^2+2ABr \geqslant 0$, $K_1 = (2E+Al-2U_0\ln\frac{-r}{2})(1-r^2)$, $K_0 = \frac{l^2}{4}(1-r^2) \geqslant 0$.

В доказательстве оценки, приведенном ниже, используется тот факт, что

$$\tilde K_2(r) = K_2(r) - \tfrac{K_3(r)}{e} > 0. \tag{21}$$

Оно получается непосредственной подстановкой равенств (20) в выражение для функции $\tilde K_2(r)$ из (21). С учетом неравенства (21) получим нижеследующую оценку, которая используется для доказательства теоремы об интервалах гарантированной устойчивости.

Утверждение 3. *Для $\gamma = 1$ имеет место оценка*

$$\tfrac{(\dot r)^2}{4} \leqslant \tfrac{K_1^2(r)}{4(K_2(r)-e^{-1}K_3(r))} - K_0(r) \equiv \psi_3^\gamma(r;\, b^*).$$

Доказательство. Пусть $\phi(S) = S\ln S$. Заметим, что функция $\phi(S)$ имеет точку минимума $S^* = \frac{1}{e}$, откуда $\phi(S) \geqslant \phi(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$. Значит, мы получим:

$$\psi(r,S) \leqslant -\tfrac{\tilde K_2}{S^2} + \tfrac{K_1}{S} - K_0 \equiv \tilde\psi(r,S) \leqslant \tilde\psi(r,S^{**}) = \tfrac{K_1^2}{4\tilde K_2} - K_0,$$

где $\tilde{K}_2 > 0$, $S^{**} = \frac{2\tilde{K}_2}{K_1}$ – точка максимума $\tilde{\psi}(r, S)$.

Доказательство нижеследующей теоремы полностью повторяет доказательство теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть*

$$b_3^* = \sup_{b^* \in (1, \frac{1+\sqrt{2}}{2})} \{b^* | \, \psi_3^\gamma(r;\, b^*) = 0 \text{ *имеет решение на* } r \in (-1,\, 0)\},$$

функция ψ_3^γ определена в утверждении 3. Тогда для $\gamma = 1$ положение равновесия (3) устойчиво по Ляпунову для $b^* \in (1 - b_3^*,\, 0) \cup \cup (1,\, b_3^*)$.

Замечание 2. Несложно подсчитать, что значение $b_3^* = 1,0271$ с точностью до 4 знаков после запятой.

4. Заключение

В статье рассмотрена система уравнений в частных производных, задающая движение идеального политропного газа на вращающейся плоскости. Рассмотрен класс решений с линейным по пространственным переменным профилем скорости, в котором возможен переход от системы уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, рассмотрены особые точки этой системы и исследована устойчивость особой точки, отвечающей вихревому движению газа. Для отдельных значений параметра вопрос устойчивости разрешен полностью, для остальных – найдены интервалы, в которых гарантирована устойчивость. Для исследования использован метод оценок. Результаты работы применимы к задачам механики сплошных сред и динамики атмосферы.

Литература

1. АНИСИМОВ С.И., ЛЫСИКОВ Ю.И. *О расширении газового облака в ваккуум* // ДАН СССР. – 1970. – Т. 34, №5. – С. 926–929.
2. БОГОЯВЛЕНСКИЙ О.И. *Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике*. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
3. ДАЙСОН Ф. *Динамика вращающегося газового облака* // Матем. Мех. – 1968. – Т. 18, №1. – С. 91–101.
4. ЗЕЛЬДОВИЧ Я.Б. *Ньютоновское и Эйнштейновское движение однородной среды* // Астрономический журнал. – 1964. – Т. 41, №5. – С. 872–883.
5. ОБУХОВ А.М. *О геострофическом ветре* // Изв. Акад. Наук. – 1949. – Т. 13. – С. 281–306.
6. ОВСЯННИКОВ Л.В. *Новое решение уравнений гидродинамики* // ДАН СССР. – 1956. – Т. 111. – С. 47–49.
7. СТАРЖИНСКИЙ В.М. *Прикладные методы нелинейных колебаний*. – М.: Наука, 1980. – 260 с.
8. ТУРЦЫНСКИЙ М.К. *О свойствах решений уравнений газовой динамики на вращающейся плоскости, отвечающих движениям с однородной деформацией* // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2020. – №2. – С. 39–45.
9. DIRICHLET G.L. *Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik* // Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. – 1857. – №14. – S. 203–207.
10. GAFFET B. *Two hidden symmetries of the Equations of Ideal Gas Dynamics, and the General Solution in a case of Nonuniform Entropy Distribution* // J. Fluid Mech. – 1983. – Vol. 134. – P. 179–194.
11. GAFFET B. *SU(3) Symmetry of the Equations of Unidimensional Gas Flow* // J. Math. Phys. – 1984. – Vol. 25, №2. – P. 245–255.

12. GAFFET B. *Expanding Gas Clouds of Ellipsoidal Shape: New Exact Solutions* // J. Fluid Mech. – 1996. – Vol. 325. – P. 113–144.
13. LYNDEN-BELL D. *On the gravitational collapse of a cold rotating gas cloud* // Proc. Camb. Phys. Soc. – 1962. – Vol. 58. – P. 709–711.
14. ROZANOVA O.S. *Classes of smooth solutions to multidimensional balance laws of gas dynamic type on Riemannian manifolds* // Trends in mathematical physics research. Nova Sci. Publ Hauppauge. – 2004. – P. 155–204.
15. ROZANOVA O.S. *Solutions with linear profile of velocity to the Euler equations in several dimensions* // Hyperbolic problems: theory, numerics, applications. – 2003. – P. 861–870.
16. ROZANOVA O.S., TURZYNSKI M.K. *On Systems of Nonlinear ODE Arising in Gas Dynamics: Application to Vortical Motion, Differential and Difference Equations with Applications* // Springer Proc. in Mathematics and Statistics. – 2018. – Vol. 230. – P. 387–398.
17. ROZANOVA O.S., TURZYNSKI M.K. *Nonlinear stability of localized and non-localized vortices in rotating compressible media, Theory, Numerics and Applications of Hyperbolic Problems* // Springer Proc. in Mathematics and Statistics. – 2018. – Vol. 236. – P. 567–580.
18. VALLIS G.K. *Atmospheric and oceanic fluids dynamics. Fundamentals and large-scale calculation*. – Cambridge University Press, 2006.

ON STUDY OF STABILITY OF ONE CLASS OF STATIONARY SOLUTIONS FOR GAS DYNAMICS EQUATIONS ON A ROTATING PLANE

Marko Turzynsky, Moscow Institute of Railway Engineering, Moscow, assistant professor (M13041@yandex.ru).

Abstract: We consider a two-dimensional system of equations of an ideal polytropic gas on a rotating plane, which arises in the dynamics of the atmosphere. The problem is very difficult in the general case, however, it admits solutions with a linear profile of velocity (corresponding to motion with uniform deformation), which can be found by solving a quadratically nonlinear system of ordinary differential equations. The system has two families of equilibria: the first family is one-parametric (corresponds to a vortex) and the second one is two-parametric (corresponds to a shift flow), the latter is always unstable. The stability of equilibria means the stability of stationary solutions of the original system in the class of perturbations with linear profile of velocity. The article considers a one-parametric family of equilibria, which corresponds to a stationary vortex motion, the parameter is responsible for the vortex intensity and changes over the real axis. Intervals of the parameter where equilibrium is unstable and where it is stable in the sense of Lyapunov were found earlier. However, they did not cover the entire real axis. For the remaining parameter values, the matrix of linearization has three pairs of purely imaginary complex conjugate eigenvalues, therefore the study of stability by conventional methods is difficult. We investigate the matter in Lagrangian coordinates. Estimates that provide intervals of guaranteed stability are constructed. The stability issue is completely resolved for a gas with one, two, and three degrees of freedom.

Keywords: ideal polytropic gas, motion with uniform deformation, equilibria.

УДК 517.9
ББК 22.1
DOI: https://doi.org/10.25728/ubs.2020.84.3

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким.

Поступила в редакцию 05.02.2020.
Дата опубликования 31.03.2020.