ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ[1]

Рыков В. В.[2]
(*Российский государственный университет нефти (НИУ) и газа им. И.М. Губкина, Институт проблем передачи информации, Российский университет дружбы народов, Москва*)
Филимонов А. М.[3]
(*Российский университет транспорта (МИИТ), Москва*)

Рассматривается некоторый класс гиперболических систем линейных неоднородных уравнений с частными производными с одной пространственной переменной. Как правило, в случае систем уравнений с частными производными при решении задач сразу используются дополнительные условия, обеспечивающие единственность задачи. Однако это сильно затрудняет построение решения в случае дополнительных условий нестандартного вида. Для аналогичной ситуации в случае обыкновенных дифференциальных уравнений стараются найти общее решение, для которого затем можно попытаться использовать заданные дополнительные условия. Однако для систем уравнений с частными производными такой подход затруднителен, поскольку, как правило, в этом случае не удается построить общее решение. Для рассмотренного в статье класса систем линейных неоднородных уравнений с частными производными удалось найти алгоритм построения общего решения. Отличительной особенностью рассмотренных систем уравнений является кратность соответствующих характеристик. В качестве применения предложенного алгоритма получено общее решение системы уравнений Колмогорова для вероятностей состояний процесса, описывающего поведение популярной в приложениях модели стохастической системы типа k-из-n: F с общим распределение времени ремонта отказывающих компонент. Указанная система уравнений Колмогорова является системой дифференциальных уравнений в частных производных упомянутого класса. Поэтому для нее удается построить общее решение.

Ключевые слова: системы уравнений с частными производными, марковские цепи.

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №20-01-00575А*

[2] *Владимир Васильевич Рыков, д.ф.-м.н., профессор* (*vladimir_rykov@mail.ru*).

[3] *Андрей Матвеевич Филимонов, д.ф.-м.н., профессор* (*amfilimonov@yandex.ru*).

1. Введение

Как известно, (см., например, [3]) система уравнений

$$R(x,t,\bar{u})\frac{\partial}{\partial t}\bar{u} + S(x,t,\bar{u})\frac{\partial}{\partial x}\bar{u} = \bar{q}(x,t,\bar{u}), \tag{1}$$

где $\bar{u} = (u_1, ..., u_m)^\top$, $\bar{q} = (q_1, ..., q_m)^\top$, а R, S – квадратные матрицы m-го порядка (матрица R предполагается невырожденной), называется гиперболической, если все собственные значения матрицы $R^{-1}S$ вещественны, а сама матрица $R^{-1}S$ приводима к диагональному виду. Достаточным условием диагонализируемости матрицы является различие всех ее собственных значений $\mu_1(x,t,\bar{u}), ..., \mu_m(x,t,\bar{u})$. Как правило, именно этот случай чаще всего и рассматривается, поскольку наличие кратных собственных значений (даже при диагонализируемости матрицы) может приводить к определенным осложнениям (см, например, [3]), поскольку уравнения характеристик определяются собственными значениями: $\frac{dx}{dt} = \mu_i(x,t,\bar{u})$.

Тем не менее, случай кратных собственных значений также может представлять определенный интерес с точки зрения приложений, так как при некоторых предположениях дает возможность построения *общего* решения системы.

Обычно для систем уравнений *с частными производными* первого порядка (как и для уравнений *с частными производными* высших порядков) ставятся дополнительные (начальные, краевые, или какие-либо иные) дополнительные условия, обеспечивающие единственность решения задачи. При этом *частное* решение сразу строится с учетом этих дополнительных условий. В случае *обыкновенных дифференциальных уравнений* n-го порядка обычно сначала пытаются найти *общее* решение, зависящее от n произвольных постоянных, а затем получить *частное* решение, удовлетворяющее заданным условиям. Для *одного* уравнения *с частными производными первого порядка*, вообще говоря, можно построить *общее* решение, зависящее от одной произвольной функции, а затем, используя дополнительные условия, строить *частные* решения. В ряде случаев подход, использующий *общее* решение, оказывается предпочтительней, особенно в случаях, когда дополнительные условия имеют «нестандартный вид». Конечно, в случае систем уравнений с частными производными общего вида (1) вряд ли можно надеяться найти способ построения *общего* решения. Однако для некоторого, достаточно широкого класса систем (в том числе для некоторых систем, встречающихся в приложениях) такое построение оказывается возможным.

В качестве приложения предложенного метода решения уравнений указанного типа рассматривается широко используемая в приложениях стохастическая модель системы типа k-из-n ($1 \leqslant k \leqslant n$). Такая система представляет собой стохастическую систему, предназначенную для выполнения различных операций и может рассматриваться в двух вариантах: как (k-из-n : F)-система или (k-из-n : G)-система. Различие состоит в трактовке параметра k: для F-систем параметр k означает количество отказавших компонент, ведущих к отказу системы, а для G-систем параметр k означает число компонент, работоспособность которых обеспечивает работу системы, т.е. система отказывает при отказе $n - k + 1$ компоненты [9].

Обзор различных результатов исследования таких моделей и их возможных приложений можно найти, например, в [4, 7, 10]. Некоторые обобщения содержатся в [6]. Обзор исследований других стохастических моделей, допускающих применение рассмотренного класса дифференциальных уравнений, можно найти также в [8].

2. Построение общего решения для некоторого класса гиперболических систем

Для линейных однородных гиперболических систем вида

$$a_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial t} + g_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} = 0, \quad i = \overline{1,m}, \tag{2}$$

в принципе, возможно построение общего решения, поскольку такие системы по своей структуре изначально являются записанными в каноническом виде (см., например, [1]), т.е. когда матрица $R^{-1}S$ системы (1) диагональна. Поэтому каждое уравнение можно записать в виде полной производной вдоль соответствующей характеристики и затем проинтегрировать вдоль этой характеристики. В самом деле, пусть $x = \varphi_i(t)$ – решение уравнения характеристик

$$\frac{dx}{dt} = \mu_i(x,t) = \frac{g_i(x,t)}{a_i(x,t)}, \quad i = \overline{1,m}. \tag{3}$$

Тогда каждое уравнение системы (2) можно переписать так:

$$\frac{du_i}{dt}\,|_{x=\varphi_i(t)} = 0, \quad i = \overline{1,m}, \tag{4}$$

а так как правые части системы (2) нулевые, то каждая функция u_i постоянна вдоль i-й характеристики, так что

$$u_i(x,t) = \Phi_i(x - \varphi_i(t)), \quad i = \overline{1,m}, \tag{5}$$

где $\Phi_i, i = 1, ..., m,$ – произвольные гладкие функции. Таким образом, получается общее решение системы (2).

Если же система *неоднородна*, причем правые части *зависят от неизвестных функций*:

$$a_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial t} + g_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} = q_i(x,t,\bar{u}), \quad i = \overline{1,m}, \tag{6}$$

то при интегрировании вдоль характеристик возникнет система интегральных уравнений вольтерровского типа, которая нисколько не проще исходной системы.

Примечание. Для того чтобы избежать терминологической неточности, отметим следующее. Для *одного* уравнения с частными производными

$$a(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + g(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} = q(x,t,u)$$

характеристиками обычно (см., например, [2]) называются линии в пространстве $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющие системе обыкновенных дифференциальных уравнений, обычно записываемой в симметрической форме

$$\frac{dt}{a(x,t)} = \frac{dx}{g(x,t)} = \frac{du}{q(x,t,u)},$$

а для *систем* уравнений (6) характеристиками принято называть линии в плоскости $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющие системе (3), которые в случае одного уравнения являются проекциями решений выше упомянутой симметрической системы на плоскость $\mathbb{R}^2$.

В настоящей работе мы рассматриваем *неоднородные* системы вида

$$a(t)\frac{\partial u_i}{\partial t} + g(x)\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{i} f_j(x)u_j, \quad i = \overline{1,m}, \tag{7}$$

где $a,\ g,\ f_j$ – заданные гладкие функции, причем $a(t) \neq 0$. Все соответствующие собственные значения – кратные и имеют вид $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_m = a^{-1}(t)g(x)$. То, что собственные значения, а значит, и характеристики, являются кратными, имеет существенное значение для построения *общего* решения.

Символ ■ обозначает конец доказательства.

Теорема 1. *Для системы (7) возможно явное построение* общего *решения, зависящего от m произвольных гладких функций.*

Доказательство. В качестве доказательства можно использовать предлагаемый далее алгоритм построения соответствующего решения. Укажем последовательность шагов для реализации этого алгоритма.

Шаг 1. Полагая $i = 1$, рассмотрим уравнение

$$a(t)\frac{\partial u_1}{\partial t} + g(x)\frac{\partial u_1}{\partial x} = f_1(x)u_1. \tag{8}$$

Это одно уравнение первого порядка. Поэтому можно (см., например, [2]), записать соответствующую характеристическую систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме:

$$\frac{dt}{a(t)} = \frac{dx}{g(x)} = \frac{du_1}{f_1(x)u_1}. \tag{9}$$

Ищем первые интегралы этой системы:

$$\frac{dt}{a(t)} = \frac{dx}{g(x)} \Longrightarrow A(t) - G(x) = C, \quad A(t) = \int \frac{dt}{a(t)}dt, \tag{10}$$

$$G(x) = \int \frac{dx}{g(x)}dx.$$

Далее,

$$\frac{dx}{g(x)} = \frac{du_1}{f_1(x)u_1} \Longrightarrow u_1 = De^{F_1(x)}, \quad F_1(x) = \int \frac{f_1(x)}{g(x)}dx. \tag{11}$$

Полагая, в соответствии с общим методом (см., например, [2]), $D = \Phi_1(C)$, где Φ_1 – произвольная гладкая функция, получаем, что общее решение первого уравнения системы (7) имеет вид:

$$u_1(x,t) = \Phi_1(A(t) - G(x))\mathrm{e}^{F_1(x)}. \tag{12}$$

Шаг 2. Теперь полагаем $i = 2$. Рассмотрим уравнение

$$a(t)\frac{\partial u_2}{\partial t} + g(x)\frac{\partial u_2}{\partial x} = f_1(x)u_1 + f_2(x)u_2. \tag{13}$$

Это уравнение также можно рассматривать как одно уравнение первого порядка, в правой части которого стоит не только неизвестная функция u_2, но и функция u_1, найденная на предыдущем шаге. Записываем соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме:

$$\frac{dt}{a(x)} = \frac{dx}{g(x)} = \frac{du_2}{f_1(x)u_1 + f_2(x)u_2}. \tag{14}$$

Ищем первые интегралы этой системы:

$$\frac{dt}{a(t)} = \frac{dx}{g(x)} \Longrightarrow A(t) - G(x) = C, \tag{15}$$

$$A(t) = \int \frac{dt}{a(t)}dt, \quad G(x) = \int \frac{dx}{g(x)}dx.$$

Ввиду кратности собственных значений, один из первых интегралов (15) совпадает с первым интегралом (10). Для следующего первого интеграла получаем соотношение

$$\frac{dx}{g(x)} = \frac{du_2}{f_1(x)u_1 + f_2(x)u_2}. \tag{16}$$

Здесь u_1 имеет вид (12), так что пользуясь ранее найденным первым интегралом (15), получаем что $u_1 = \Phi_1(C)\exp(F_1(x)$. Поэтому уравнение для нахождения следующего первого интеграла системы (14) принимает вид

$$\frac{du_2}{dx} = \frac{f_2(x)}{g(x)}u_2 + \frac{f_1(x)}{g(x)}\Phi_1(C)\mathrm{e}^{F_1(x)}. \tag{17}$$

Это обыкновенное линейное неоднородное уравнение. Пользуясь результатом (11), можно сразу написать общее решение $\breve{u}_2$ соответствующего (17) однородного уравнения:

$$\breve{u}_2 = D\mathrm{e}^{F_2(x)}, \quad F_2(x) = \int \frac{f_2(x)}{g(x)}dx. \tag{18}$$

Частное решение $\hat{u}_2$ соответствующего неоднородного обыкновенного уравнения ищем методом вариации произвольной постоянной в виде

$$\hat{u}_2 = V(x)\mathrm{e}^{F_2(x)}. \tag{19}$$

В последнем уравнении для избежания путаницы в обозначениях мы обозначили неизвестную функцию не $D(x)$, а $V(x)$.

Подставляя (19) в (17), получаем уравнение для $V(x)$:

$$V'(x) = \mathrm{e}^{-F_2(x)}\frac{f_1(x)}{g(x)}\Phi_1(C),$$

так что

$$V(x) = \Phi_1(C)Q_2(x), \quad Q_2(x) = \int \mathrm{e}^{F_1(x)-F_2(x)}\frac{f_1(x)}{g(x)}dx.$$

Поэтому частное решение $\hat{u}_2$ уравнения (17) имеет вид:

$$\hat{u}_2 = \Phi_1(C)Q_2(x)\mathrm{e}^{F_2(x)}.$$

Таким образом, общее решение обыкновенного уравнения (17) имеет вид

$$u_2 = D\mathrm{e}^{F_2(x)} + \Phi_1(C)Q_2(x)\mathrm{e}^{F_2(x)}. \tag{20}$$

Поэтому, полагая $D = \Phi_2(C)$ (см., например, [3]), где Φ_2 – произвольная гладкая функция, получаем общее решение второго уравнения системы (7):

$$u_2 = (\Phi_2(A(t) - G(x))\mathrm{e}^{F_2(x)} + \Phi_1(A(t) - G(x))Q_2(x))\mathrm{e}^{F_2(x)}.$$

Поступая последовательно указанным образом, будем получать $u_3, ..., u_m$. При этом каждое решение u_k будет зависеть от k произвольных функций, так что u_m будет зависеть от m произвольных функций $\Phi_1, ..., \Phi_m$, что и завершает построение решения в соответствии с алгоритмом. ■

Примечание. Мы не выписываем окончательных формул для всех u_k ввиду их громоздкости. При решении конкретной задачи целесообразнее воспроизводить схему доказательства как алгоритм последовательного построения решений.

3. Пример. Система k-из-$n : F$

В качестве примера применения исследования предложенного класса уравнений рассмотрим модель однородной восстанавливаемой системы типа k-из-n : F с общим законом распределения времени восстановления отказывающих компонент. Такая система состоит из n компонент и отказывает когда откажут k из её компонент.

Предположим, что

- компоненты отказывают в соответствии с пуассоновским потоком интенсивности α;
- случайные длительности восстановления отказавших компонент – независимые одинаково распределённые (н.о.р.) случайные величины (с.в.) с абсолютно непрерывной функцией распределения (ф.р.) $B(t)$, плотность распределения (п.р.) которой обозначим через $b(t) = B'(t)$;
- после отказа системы восстанавливается только одна из отказавших компонент и система переходит в состояние $k-1$.

Обозначим через

- j – число отказавших компонент;;
- $E = \{j : \ j = \{0, 1, \ldots k\}\}$ – множество состояний системы, при этом k означает состояние отказа системы;
- $J = \{J(t), \ t \in R\}$ случайный процесс, где $J(t) = j$, если в момент t система находится в состоянии $j \in E$;
- $\lambda_j = (n - j)\alpha$ – интенсивность отказа системы в её j-м состоянии;
- $\beta(x) = \frac{B'(x)}{1-B(x)}$– условная плотность восстановления (окончания ремонта) компоненты при условии, что на её ремонт было затрачено время x;
- $\tilde{b}(s)$ – преобразование Лапласа (ПЛ) п.р. $b(t)$ (производящая функция времени восстановления);
- $b = \int\limits_0^\infty (1 - B(x))dx$ – среднее время ремонта компонент.

Для исследования рассматриваемой системы используется метод марковизации, который состоит в расширении пространства состояний процесса путём введения дополнительной переменной [5] с целью превращения процесса в марковский. В данном случае в качестве дополнительной переменной $X(t)$ используется время, затраченное к моменту t на восстановление ремонтируемой компоненты системы. При этом процесс

$$Z = \{Z(t) = (J(t), X(t)),\ \ t \geqslant 0\}$$

в пространстве состояний

$$\mathcal{E} = \{0, (j, \mathbb{R}^{+}) : j = \overline{1, k}\}$$

становится марковским. Обозначим через $\pi_j(t; x)$ п.р. относительно дополнительной переменной вероятности его микросостояний в области $0 \leqslant x \leqslant t < \infty$ их определения,

$$\pi_j(t; x)dx = \mathbf{P}\{J(t) = j,\ x < X(t) \leqslant x + dx\}\ \ (j = \overline{1, k}).$$

При этом соответствующие вероятности макросостояний для $t \geqslant 0$ принимают вид

$$\pi_j(t) = \mathbf{P}\{J(t) = j\} = \int\limits_0^t \pi_j(t; x)dx.$$

Принимая во внимание вероятностное происхождение этих функций, они предполагаются неотрицательными, $\pi_j(t; x) \geqslant 0$, $\pi_j(t) \geqslant 0$.

На рис. 1 представлен граф переходов соответствующего процесса Z.

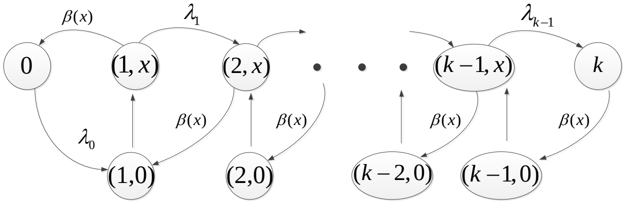

Рис. 1. Граф переходов процесса Z

Теорема 2. *Вероятности микросостояний* $\pi_j(t;x)$ *удовлетворяют системе прямых уравнений Колмогорова,*

$$(21)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\pi_0(t) = \int\limits_0^{\top} \pi_1(t,x)\beta(x)dx, \\ (\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x})\pi_1(t,x) = -(\lambda_1 + \beta(x))\pi_1(t,x) \qquad (i = \overline{2,k-1}), \\ (\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x})\pi_i(t,x) = -(\lambda_i + \beta(x))\pi_i(t,x) + \lambda_{i-1}\pi_{i-1}(t,x), \\ (\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x})\pi_k(t) = -(\lambda_k + \beta(x))\pi_k(t,x) + \lambda_{k-1}\pi_{k-1}, \end{cases}$$

где $i = \overline{2,k-1}$ *с начальным*

$$\pi_0(0) = 1$$

и краевыми условиями

$$\begin{cases} \pi_1(t,0) = \lambda_0\pi_0(t) + \int\limits_0^{\top} \pi_2(t,x)\beta(x)dx, \\ \pi_i(t,0) = \int\limits_0^{\top} \pi_{i+1}(t,x)\beta(x)dx \qquad (i = \overline{2,k-1}), \\ \pi_k(t,0) = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Опираясь на приведённый граф переходов, обычным методом сравнения вероятностей состояний процесса в близкие моменты времени t и $t+\Delta$ с последующим переходом к пределу при $\Delta \to 0$ для вероятностей состояний процесса получим систему дифференциальных уравнений в частных производных (21), которая представляет собой систему гиперболических дифференциальных уравнений рассмотренного ранее вида. Рассматривая в соответствии с графом переходов изменения состояний процесса в момента окончания восстановления компонент получаем краевые условия. Отметим, что они имеют «нестандартный вид». Начальное условие соответствует полностью работоспособной системе в начальный (нулевой) момент времени. ■

Для построения общего решения полученной системы уравнений воспользуемся предложенным выше алгоритмом. В соответствии с этим алгоритмом, для построения *общего* решения второго из уравнений системы (21) выпишем соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме

$$(22)\qquad \frac{dt}{1} = \frac{dx}{1} = \frac{d\pi_1}{-(\lambda_1 + \beta(x))\pi_1}.$$

Находим первые интегралы этой системы:

$$dt = dx \quad \Longrightarrow \quad t - x = C,$$

$$d\pi_1 = -(\lambda_1 + \beta(x))\pi_1 dx \quad \Longrightarrow \quad \pi_1 = D\mathrm{e}^{-\lambda_1 x} g(x).$$

Здесь введено обозначение

$$g(x) = \mathrm{e}^{-\int\limits_0^x \beta(x)dx} \quad \Longrightarrow \quad g(0) = 1. \tag{23}$$

Поэтому, в соответствии с алгоритмом, изложенным при доказательстве теоремы, полагаем

$$D = \Phi_1(C) \quad \Rightarrow \quad \pi_1(t, x) = \mathrm{e}^{-\lambda_1 x} g(x)\Phi_1(t - x), \tag{24}$$

где Φ_1 – произвольная гладкая функция.

Перейдем к построению *общего* решения $\pi_2(x, t)$. Выписываем соответствующую систему обыкновенных уравнений в симметрической форме

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{1} = \frac{d\pi_2}{-(\lambda_2 + \beta(x))\pi_2 + \lambda_1 \pi_1(x, t)}. \tag{25}$$

Один первый интеграл системы (25), очевидно, имеет вид

$$dt = dx \quad \Rightarrow \quad t - x = C. \tag{26}$$

Воспользовавшись выражением для $\pi_1(x, t)$ из (24), для отыскания другого первого интеграла этой системы получаем

$$d\pi_2 = (-(\lambda_2 + \beta(x))\pi_2 + \lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 x} g(x)\Phi_1(t - x))dx. \tag{27}$$

С учетом (27), получаем уравнение

$$\frac{d\pi_2}{dx} = -(\lambda_2 + \beta(x))\pi_2 + \lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 x} g(x)\Phi_1(C).$$

Общее решение $\check{\pi}_2$ соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d\check{\pi}_2}{dx} = -(\lambda_2 + \beta(x))\check{\pi}_2$$

имеет вид

$$\check{\pi}_2 = D\mathrm{e}^{-\lambda_2 x} g(x).$$

Частное решение $\hat{\pi}_2$ неоднородного уравнения будем искать методом вариации произвольной постоянной в виде (как и выше, чтобы избежать путаницы в обозначениях, пишем не $D(x)$, а $V(x)$):

$$\hat{\pi}_2 = V(x)\mathrm{e}^{-\lambda_2 x} g(x).$$

Поэтому для неизвестной функции $V(x)$ получаем
$$V' = \lambda_1 \Phi_1(C) \mathrm{e}^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}.$$
Таким образом,
$$V(x) = \frac{-\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\Phi_1(C)\mathrm{e}^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}.$$
Поэтому общее решение соответствующего неоднородного уравнения имеет вид
$$\pi_2 = D\mathrm{e}^{-\lambda_2 x}g(x) - \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\Phi_1(C)\mathrm{e}^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}\mathrm{e}^{-\lambda_2 x}g(x) =$$
$$= g(x)(D\mathrm{e}^{-\lambda_2 x} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\Phi_1(C)\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}).$$

Полагая
$$D = \Phi_2(C),$$
где Φ_2 – произвольная гладкая функция, получаем *общее* решение соответствующего уравнения с частными производными
$$\pi_2(t,x) = g(x)(\Phi_2(t-x)\mathrm{e}^{-\lambda_2 x} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\Phi_1(t-x)\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}).$$

Совершенно аналогично строим общие решения последующих уравнений, а именно,
$$\pi_i(t,x) = g(x)\Bigg(\Phi_i(t-x)\mathrm{e}^{-\lambda_i x} +$$
$$+\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^j \frac{\lambda_{i-1}\cdots\lambda_{i-j}}{(\lambda_j-\lambda_{j+1})\cdots(\lambda_j-\lambda_i)}\Phi_j(t-x)\mathrm{e}^{-\lambda_j x}\Bigg),$$
где $\Phi_1, \ldots, \Phi_i$ – произвольные гладкие функции.

Полагая
$$\Psi_j = (-1)^j \frac{\lambda_{i-1}\cdots\lambda_{i-j}}{(\lambda_j-\lambda_{j+1})\cdots(\lambda_j-\lambda_i)}\Phi_j, \quad j=\overline{1, i-1}, \quad \Psi_i = \Phi_i,$$
получаем *общее* решение в виде
$$\pi_i(t,x) = g(x)\left(\sum_{j=1}^{i}\Psi_j(t-x)\mathrm{e}^{-\lambda_j x}\right).$$

Примечание. Специфика уравнений (достаточно простые характеристики) позволяет вычислить вероятности состояний системы в терминах преобразования Лапласа через преобразования

Лапласа $\tilde{\Psi}_j(s)$ функций $\Psi_j(t)$. А именно, переходя к преобразованию Лапласа для вероятностей макросостояний, из последнего выражения найдём

$$\tilde{\pi}_j(s) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\pi_j(t)dt = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\int\limits_0^T \sum_{i=1}^j \Psi_i(t-x)\mathrm{e}^{-\lambda_i x} =$$

$$\sum_{i=1}^j \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{e}^{-\lambda_i x}dx \int\limits_x^\infty \Psi_i(t-x)\mathrm{e}^{-(t-x)} = \sum_{i=1}^j \tilde{\Psi}_i(s)\tilde{g}(s+\lambda_i).$$

Далее с помощью краевых условий и первого из уравнений (21) можно надеяться вычислить преобразования Лапласа неизвестных функций $\Psi_j(t)$. Но это отдельная задача, заслуживающая специального исследования.

4. Заключение

В работе изучен специальный класс дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа, для которых разработан алгоритм вычисления общего решения. Алгоритм опробован при решении системы прямых дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний марковского процесса, описывающего поведение популярной в приложениях модели стохастической системы типа k-из-n : F с общим распределением времени ремонта отказывающих компонент.

Литература

1. МЫШКИС А.Д., ФИЛИМОНОВ А.М. *Непрерывные решения гиперболических систем квазилинейных уравнений с двумя независимыми переменными. Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения.* – М.: Физ.-мат. лит-ра, 2003. – С. 337–351.
2. ПЕТРОВСКИЙ И.Г. *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М.: Изд-во МГУ, 1984.

3. РОЖДЕСТВЕНСКИЙ Б.Л., ЯНЕНКО Н.Н. *Системы квазилинейных уравнений*. – М.: Наука, 1978. – 688 с.
4. CHAKRAVARTHY S.R., KRISHNAMOORTHY A., USHAKUMARI P.V. *A (k-out-of-n) reliability system with an unreliable server and Phase type repairs and services: The (N, T) policy* // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. – 2001. – Vol. 14(4). – P. 361–380.
5. COX D.R. *The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables* // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. – 1955. – Vol. 51(3). – P. 433–441. – DOI: 10.1017/S0305004100030437.
6. GERTSBAKH I., SHPUNGIN Y. *Reliability Of Heterogeneous ((k, r)-out-of-(n, m)) System* // RTA. – 2016. – No. 3(42), Vol-11. – P. 8–10.
7. GOLIFORUSHANI S., XIE M., BALAKRISHNAN N. *On the mean residual life of a generalized k-out-of-n system* // Communications in Statistics – Theory and Methods. 2018. – Vol. 47(10). – P. 2362–2372.
8. RYKOV V. *On Reliability of Renewable Systems* // In: Reliability Engineering. Theory and Applications / Eds.: I. Vonta, M. Ram. – CRC Press, 2018. – P. 173–196.
9. SHEPHERD D.K. *k-out-of-n Systems, Encyclopedia of Statistics in Quality and Reliability.* – Wiley, 2008.
10. TRIVEDI K.S. *Probability and Statistics with Reliability, Queuing and Computer Science Applications.* – Wiley, New York, 2002.

HYPERBOLIC SYSTEMS WITH MULTIPLE CHARACTERISTIC AND APPLICATIONS

Vladimir Rykov, Gubkin Russian State University of Oil and Gas, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, professor (rykov-vv@rudn.ru).
Andrey Filimonov, Russian University of Transport (MIIT), Moscow, professor (amfilimonov@yandex.ru).

Abstract: The article considers a certain class of hyperbolic systems of linear partial differential equations with one spatial variable. As a rule, in the case of systems of partial differential equations, when solving problems, additional conditions are immediately used that ensure the uniqueness of the problem. However, this greatly complicates the construction of the solution in the case of additional conditions of a non-standard form. For a similar situation, in the case of ordinary differential equations, they try to find a general solution, for which you can then try to use the given additional conditions. However, for systems of partial differential equations this approach is difficult, since, as a rule, in this case it is not possible to construct a general solution. For the class of systems of linear inhomogeneous partial differential equations considered in the article, we managed to find an algorithm for constructing a general solution. A distinctive feature of the considered systems of equations is the multiplicity of the corresponding characteristics. As an application of the proposed algorithm, a general solution of the Kolmogorov system of equations for the probabilities of the states of a process that describes the behavior of the popular in applications of a model of a stochastic system of type k-fromn: F with a common distribution of repair time of failed components. The specified system of Kolmogorov equations is a system of differential equations in partial derivatives of the mentioned class. Therefore, for her it is possible to build a common solution.

Keywords: partial differential equations systems, Markov chains.

УДК 517.9
ББК 22.161.6
DOI: 10.25728/ubs.2019.85.4

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.М. Вишневским.

Поступила в редакцию 13.04.2020
Дата опубликования 31.05.2020.