

## ДВА ПОДХОДА К СИНТЕЗУ ИНВАРИАНТНОЙ СИСТЕМЫ СЛЕЖЕНИЯ ДЛЯ БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА<sup>1</sup>

Кокунько Ю. Г.<sup>2</sup>, Краснова С. А.<sup>3</sup>  
(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*Рассматривается проблема автоматического управления движением центра масс беспилотного летательного аппарата в условиях действия внешних неконтролируемых возмущений и измерений только пространственных координат центра масс и их задающих воздействий. Ставится задача синтеза закона управления в форме динамической обратной связи, обеспечивающего слежение за заданными сигналами инвариантно по отношению к внешним возмущениям с заданной точностью. В рамках блочного подхода к использованию сигмоидальных обратных связей, обеспечивающих ограниченность фиктивных и истинных управлений, разработаны регуляторы двух типов. В первом регуляторе благодаря компенсации перекрестных связей в замкнутой системе обеспечивается автономное управление пространственными координатами центра масс с независимым выбором параметров обратной связи в каждом из трех контуров. Для реализации данного алгоритма построен наблюдатель пониженного порядка для оценивания вектора скорости по измерению вектора координат центра масс. На основе данных сигналов вычисляются синусы и косинусы углов пути и наклона траектории, необходимые для формирования обратной связи. Во втором регуляторе для сокращения объема вычислений, выполняемых в реальном времени, перекрестные связи не компенсируются, а для выбора параметров обратной связи разработан иерархическая система неравенств, не требующая точного знания углов пути и наклона траектории. Для реализации данного алгоритма построен наблюдатель пониженного порядка для оценивания вектора производных ошибок слежения по измерению вектора ошибок слежения. Приведены результаты численного моделирования и сравнительного анализа разработанных регуляторов.*

Ключевые слова: беспилотный летательный аппарат, слежение, инвариантность, сигма-функция, наблюдатель состояния пониженного порядка.

---

<sup>1</sup> Работа частично поддержана грантами РФФИ, проекты № 18-01-00846А, 20-01-00363-А.

<sup>2</sup> Юлия Георгиевна Кокунько, м.н.с. (juliakokunko@gmail.com).

<sup>3</sup> Светлана Анатольевна Краснова, д.т.н., профессор, г.н.с. (skrasnova@list.ru).

## **1. Введение**

Беспилотные летательные аппараты (БПЛА) имеют ряд важных преимуществ по сравнению с пилотируемой авиацией, в том числе меньшие эксплуатационные затраты, стоимость, массу и габариты, возможность выполнения маневров с существенными перегрузками, что является факторами активного развития данной отрасли в настоящее время. Усилия разработчиков сосредоточены на повышение автономности БПЛА и обеспечении их работы в автоматическом режиме не только в военных, но и в гражданских целях.

При построении системы автоматического управления БПЛА определенные трудности вызывают высокая нелинейность динамической модели объекта управления, наличие параметрических и внешних возмущений, необходимость учитывать проектные ограничения на переменные состояния и управления, а также поддерживать диапазон рабочих режимов в процессе управления полетом, который происходит, как правило, при существенном изменении внешних факторов. По этой причине стандартные методы синтеза программного управления БПЛА [1], связанные с решением обратных задач динамики, неэффективны и требуют дополнения или полной замены законами управления в форме динамической обратной связи.

Наиболее распространенными в задачах управления БПЛА являются простые в реализации ПИД-регуляторы [26]. Однако они не позволяют учитывать проектные ограничения на стадии синтеза, недостаточно робастны и нуждаются в перенастройке при смене рабочих режимов, которая происходит неоднократно в большинстве нетривиальных профилей полета. В условиях параметрической неопределенности требуется привлечение и разработка методов адаптации и автоматической настройки коэффициентов обратной связи [24].

Отдельная проблема возникает при действии внешних (ветровых) возмущений. Классический подход заключается в расширении пространства состояний за счет автономных динамических моделей, имитирующих действие внешних возмущений [4, 13, 14, 16], и компенсации их влияния на основе полученных

оценок. Однако попытка априори предусмотреть все возможные вариации моделей внешних воздействий с различными параметрами и структурой приведет к недопустимому усложнению расширенной математической модели объекта управления и потребует высоких вычислительных мощностей.

Альтернативный метод обеспечения инвариантности по отношению к внешним возмущениям и вариации параметров заключается в использовании разрывных управлений с организацией скользящих режимов [23]. Разрывные управления заведомо ограничены, однако эти законы приобретают эвристический характер при их применении в системах механической природы в качестве управляющих сил и моментов [25].

С целью использовать преимущества систем с разрывными управлениями и обойти проблемы их реализуемости, в данной работе в рамках блочного подхода разработаны процедуры синтеза следящей системы БПЛА с  $S$ -образными, всюду ограниченными обратными связями в виде сигма-функции [7, 9, 10, 12, 19], которая является гладкой допредельной реализацией функции знака. Показано, что предлагаемый подход позволяет учитывать проектные ограничения на скорость и перегрузку на стадии синтеза и обеспечить вывод центра масс БПЛА на заданную пространственную траекторию и его движение в малой окрестности заданной кривой инвариантно по отношению к внешним возмущениям.

В работе рассматривается пространственное движение центра масс БПЛА в траекторной системе координат. Математическая модель объекта управления представлена тремя взаимосвязанными нелинейными системами, каждая из которых имеет второй порядок и записана в нормальной форме. Матрица перед управляющими воздействиями, выраженных через продольную и поперечную перегрузки, а также угол крена, является нелинейной и зависит от синусов и косинусов углов пути и наклона траектории. Для данной системы в рамках блочного подхода разработаны законы сигмоидального управления двух типов. В первом регуляторе с целью компенсации в замкнутой системе перекрестных связей в законе управления используется обратная матрица, элементы которой вычисляются в реальном

времени. Во втором регуляторе с целью сократить объем вычислений в реальном времени обратная матрица не используется. Для настройки параметров регулятора получена система иерархических неравенств, основанных на приведении матрицы перед управлением к верхнетреугольному виду. Оба регулятора обеспечивают в замкнутой системе инвариантность по отношению к внешним возмущениям с заданной точностью и в отличие от [3, 4, 14, 16, 18] не требуют ни построения модели возмущений, ни их оценивания, что позволяет упростить структуру подсистемы наблюдения в условиях неполных измерений.

Для каждого регулятора построены наблюдатели состояния пониженного порядка с кусочно-линейными корректирующими воздействиями [5, 6, 11, 18, 22]. В отличие от стандартных редуцированных наблюдателей [15, 20], где отбрасывается динамика измеряемых переменных, здесь, наоборот, отбрасывается динамика неизменяемых переменных, которые в задаче наблюдения трактуются как внешние, ограниченные возмущения и оцениваются посредством корректирующих воздействий наблюдателя. Для первого регулятора наблюдатель строится на основе исходной редуцированной модели объекта управления и дает оценки вектора скорости по измерениям вектора положения центра масс. Для реализации в законе управления обратной матрицы по полученным оценкам в реальном времени вычисляются синусы и косинусы углов пути и наклона траектории. Для второго регулятора наблюдатель строится на основе редуцированной системы, записанной относительно ошибок слежения, для оценивания вектора производных ошибок слежения по измерениям вектора ошибок слежения. Такой подход не требует промежуточных вычислений в реальном времени, так как именно по этим восстановленным сигналам формируется обратная связь.

Обратим внимание на целесообразность использования наблюдателей состояния в контуре обратной связи системы управления БПЛА. Как правило, современные БПЛА многоразового использования оснащены приемником GPS и комплексом датчиков (микромеханическим гироскопом, акселерометром, барометрическим высотомером, трехосным магнитометром

и др.). Они могут иметь встроенные фильтры Калмана для выделения полезного незашумленного сигнала и в совокупности обеспечивают определение текущих навигационных параметров, углов ориентации, угловых скоростей и ускорений. Однако, во-первых, для БПЛА с малым взлетным весом (до 5 кг) предъявляются жесткие массогабаритные требования к измерительному комплексу. Во-вторых, дешевые и облегченные измерительные приборы имеют низкую точность. В-третьих, недостаточно надежны, так как в случае кратковременного пропадания питания требуют начальной настройки, которую невозможно выполнить во время полета. Таким образом, использование подсистемы наблюдения позволит отказаться от части датчиков, что удешевит и снизит взлетную массу БПЛА, либо при полном комплекте датчиков она будет выполнять функции системы аналитического резервирования измерительных приборов в целях сохранения работоспособности системы при их отказе.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 описывается модель объекта управления, формулируется постановка задачи, приводятся базовые сведения о сигма-функции. В разделе 3 приводятся процедуры синтеза регуляторов первого и второго типов. В разделе 4 приводятся результаты численного моделирования разработанных алгоритмов управления и результаты сравнительного анализа разработанных алгоритмов.

## **2. Описание проблемы**

### **2.1. МОДЕЛЬ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ**

Рассматривается математическая модель пространственного движения центра масс (материальной точки) БПЛА в траекторной системе координат, представленная в нормальной форме [2–3]

$$(1) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = ag + B(\theta, \Psi)(u + \eta),$$

где  $x_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13})^T \in R^3$  – вектор пространственных координат центра масс (выходные, измеряемые и регулируемые переменные) с элементами  $x_{11} := L$  – продольная дальность,  $x_{12} := H$  – высота,  $x_{13} := Z$  – боковое смещение;  $x_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23})^T \in R^3$  –

вектор скорости пространственных координат с элементами

$$(2) \quad x_{21} := V \cos \theta \cos \Psi, x_{22} := V \sin \theta, x_{23} := -V \cos \theta \sin \Psi,$$

где  $V$  – путевая скорость,  $\theta$  – угол наклона траектории,  $\Psi$  – путевой угол;  $g$  – ускорение свободного падения,  $a = (0; -1; 0)^T$ ;

$u = (u_1, u_2, u_3)^T = R^3$  – вектор управления, элементы которого

$u_1 = gn_x$ ,  $u_2 = gn_y \cos \gamma$ ,  $u_3 = gn_y \sin \gamma$  выражены через продольную  $n_x$  и поперечную  $n_y$  перегрузки, а также угол крена  $\gamma$  вектора перегрузки,  $|\gamma| < \pi$ ;

$\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T$  – вектор внешних детерминированных возмущений;

$$(3) \quad B = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \Psi & -\sin \theta \cos \Psi & \sin \Psi \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta \sin \Psi & \sin \theta \sin \Psi & \cos \Psi \end{pmatrix}, \det B \equiv 1, B^{-1} = B^T.$$

Учитывая, что в режиме полета справедливы неравенства  $V > 0$ ,  $|\theta(t)| < \pi/2$ ,  $|\Psi(t)| < \pi/2$ ,  $t \geq 0$ , из (2) следуют обратные соотношения:

$$(4) \quad V = \sqrt{x_{21}^2 + x_{22}^2 + x_{23}^2}, x_{21}^2(t) + x_{23}^2(t) \neq 0,$$

$$\sin \theta = \frac{x_{22}}{V}, \cos \theta = \sqrt{1 - \frac{x_{22}^2}{V^2}}, \cos \Psi = \frac{x_{21}}{V \cos \theta}, \sin \Psi = -\frac{x_{23}}{V \cos \theta}.$$

Для системы (1) рассматривается проблема отслеживания выходными переменными  $x_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13})^T$  заданных сигналов  $\chi(t) = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)^T$  в следующих предположениях:

– прямым измерениям доступны только траекторные координаты  $x_1(t)$ , шумы в измерениях либо отсутствуют, либо уже отфильтрованы с помощью дополнительных функций, которыми обладают современные измерительные системы;

– аналитический вид задающих воздействий  $\chi(t)$  не известен, имеются только их текущие значения, как следствие, текущие значения скоростей и ускорений задающих воздействий не известны;

– автономные динамические модели, имитирующие внешние воздействия, в построения не вводятся; сигналы  $\eta_i(t)$ ,

$\dot{\eta}_i(t)$ ,  $\dot{\chi}_i(t)$ ,  $\ddot{\chi}_i(t)$ ,  $\ddot{\chi}_i(t)$ ,  $i = \overline{1,3}$ , полагаются неизвестными функциями времени, ограниченными известными константами:

$$(5) \quad |\eta_i(t)| \leq N_i, |\dot{\eta}_i(t)| \leq \bar{N}_i, |\chi_i^{(j)}(t)| \leq Y_{ji} \leq Y_j, t \geq 0, j = \overline{1,3}, i = \overline{1,3}.$$

Задача планирования пространственной траектории является самостоятельной проблемой и здесь не рассматривается. Предполагается, что задающие воздействия заданы корректно и их параметры являются допустимыми для отработки конкретным БПЛА, а именно

$$(6) \quad \|\chi^{(j)}\| \leq Y_j < X_j, |x_{i1}^{(j)}(t)| \leq X_{ji} \leq X_j, t \geq 0, j = \overline{1,3}, i = \overline{1,3},$$

где  $\|x_{i1}^{(j)}\| \leq X_j$  – проектные ограничения конкретного БПЛА.

Ставится задача синтеза динамической обратной связи, обеспечивающей стабилизацию ошибок слежения

$$e_{i1}(t) = x_{i1}(t) - \chi_i(t), \quad i = \overline{1,3},$$

с заданной точностью

$$(7) \quad |e_{i1}(t)| \leq \delta_{i1}, t > t_1 > 0, i = \overline{1,3},$$

что обеспечивает вывод центра масс БПЛА на заданную пространственную траекторию за конечное время и его дальнейшее движение в малой окрестности данной кривой. Данная задача включает, во-первых, синтез базового (т.е. в предположении, что все переменные состояния доступны для измерений) закона управления, обеспечивающего инвариантность по отношению к внешним возмущениям; во-вторых, синтез наблюдателя для оценивания неизмеряемых сигналов, требуемых для формирования обратной связи. В данной работе базовые законы управления в форме обратной связи формируются по принципу блочного управления. Однако вместо традиционно используемых линейных локальных связей и управлений [3, 8, 11, 18] с целью обеспечения проектных ограничений на скорость и перегрузку на стадии синтеза используются нелинейные, гладкие и всюду ограниченные сигма-функции, которые рассматриваются в следующем подразделе.

## 2.2. СИНТЕЗ СИСТЕМЫ С СИГМА-УПРАВЛЕНИЕМ

Сигма функция

$$\sigma(kx) = 2 / (1 + e^{-kx}) - 1, \quad x \in R, \quad k = \text{const} > 0$$

является допредельной реализацией функции знака  $y = \text{sign } x$  в следующем смысле:

$$\sigma(-kx) = -\sigma(kx), \quad \sigma(kx) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} kx / 2, \quad \sigma(kx) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \text{sign } x.$$

Первая производная сигма-функции – положительная ограниченная четная функция вида

$$\sigma'(kx) = 0,5k(1 - \sigma^2(kx)).$$

Для сигма-функции и ее первой производной в указанных интервалах справедливы следующие оценки:

$$(8) \quad \sigma(k\delta) < |\sigma(kx)| < 1, \quad |x| > \delta > 0;$$

$$\frac{\sigma(k\delta)|x|}{\delta} \leq |\sigma(kx)| \leq \sigma(k\delta), \quad 0 < \sigma'(k\delta) \leq \sigma'(kx) \leq \sigma'(0) = \frac{k}{2}, \quad |x| \leq \delta.$$

Из неравенств (8) следует, что при  $|x| > \delta$  сигма-функция близка к постоянной функции, а при  $|x| \leq \delta$  – к линейной. В качестве границы указанного разделения сигма-функции при  $x \geq 0$  рекомендуется принять точку из интервала  $k\delta = c \in [1,3; 3]$  [9], где:  $\pm 1,3$  – абсциссы точек перегиба первой производной  $\sigma''(\pm 1,3) = 0$ , при этом

$$\sigma(\pm 1,3) \approx \pm 0,57, \quad \sigma'(\pm 1,3) \approx 0,34k;$$

$\pm 3$  – абсциссы вершин сигма-функции, в которых ее кривизна достигает максимума, при этом

$$\sigma(\pm 3) \approx \pm 0,9, \quad \sigma'(\pm 0,9) \approx 0,095k.$$

Для формализации использования сигма-функции в законе управления рассмотрим возмущенную систему первого порядка

$$\dot{x} = \eta(t) - u,$$

где  $x \in R$  – измеряемая переменная состояния,  $\eta(t)$  – внешнее возмущение, которое является неизвестной функцией времени, ограниченной вместе со своей производной:

$$|\eta(t)| \leq N = \text{const} > 0, \quad |\dot{\eta}(t)| \leq \bar{N} = \text{const} > 0, \quad t \geq 0,$$

$u = m\sigma(kx)$  – сигма-управление с амплитудой  $m = \text{const} > 0$



и углом наклона  $k = \text{const} > 0$ , который играет роль большого коэффициента. Требуется выбрать эти параметры так, чтобы обеспечить стабилизацию переменной состояния с заданной точностью за заданное время

$$(9) \quad |x(t)| \leq \delta, \quad t > t^* > 0.$$

Пусть  $|x(0)| > \delta$ . С учетом первого неравенства (8) найдем нижнюю оценку для выбора амплитуды  $m$ , обеспечивающего (9), из достаточных условий устойчивости  $x\dot{x} < 0$ . Это неравенство выполняется вне окрестности  $|x| \leq \delta$  при выборе ограниченной амплитуды на основе неравенства:

$$(10) \quad x\dot{x} = x(\eta - m\sigma(kx)) \leq |x|(N - m\sigma(k\delta)) < 0 \Rightarrow m > N / \sigma(k\delta),$$

где сигма-функция оценивается снизу константой  $\sigma(k\delta) \geq \sigma(c)$ .

Время сходимости переменной в указанную окрестность нуля (9) зависит от начальных условий:

$$(11) \quad \frac{|x(0)| - \delta}{m\sigma(c) + N} \leq t \leq \frac{|x(0)| - \delta}{m\sigma(c) - N}.$$

Для обеспечения заданного времени сходимости при выборе амплитуды нижнюю оценку следует соответственно повысить:

$$m > \frac{1}{\sigma(c)} \left( \frac{|x(0)| - \delta}{t^*} + N \right).$$

При  $|x(0)| \leq \delta$  переменная состояния сразу находится в заданной области и  $t^* = 0$ , а выполнение неравенства (10) гарантирует, что переменная не покинет окрестность нуля, границы которой определяется выбором второго параметра:

$$(12) \quad |x(t)| \leq c/k \leq \delta \Rightarrow k \geq c/\delta, \quad c \in [1, 3; 3].$$

Для дальнейших построений имеет значение стабилизация не только переменной состояния, но и ее производной. Для оценки области сходимости производной

$$(13) \quad |\dot{x}(t)| \leq \Delta, \quad t > t^*$$

составим вспомогательное уравнение

$$\ddot{x} = \dot{\eta} - m\sigma'(kx)\dot{x} = \dot{\eta} - 0,5mk(1 - \sigma^2(kx))\dot{x},$$

на основе которого проанализируем достаточные условия:

$$\ddot{x}\ddot{x} = \dot{x}(\dot{\eta} - m\sigma'(kx)\dot{x}) \leq |\dot{x}|(\bar{N} - 0,5km(1 - \sigma^2(k\delta))|\dot{x}|) < 0.$$

При уже выбранных параметрах  $m$  (10),  $c$  и  $k$  (12) неравенство  $\dot{x}\ddot{x} < 0$  справедливо вне области

$$(14) \quad |\dot{x}(t)| \leq \frac{2\bar{N}}{km(1 - \sigma^2(c))},$$

в которую стягивается переменная  $\dot{x}(t)$  при  $t > t^*$ . Обратим внимание, что при выборе большого коэффициента в виде

$$(15) \quad k > \max \left\{ \frac{c}{\delta}, \frac{2\bar{N}}{m(1 - \sigma^2(c))\Delta} \right\}$$

с заданной точностью обеспечиваются оба неравенства (9), (13).

### 3. Синтез динамической обратной связи

В рамках блочного подхода [7, 12, 19] рассмотрим два варианта синтеза динамической обратной связи с сигма-управлениями на основе математической модели (1), обеспечивающих процесс отслеживания пространственными координатами центра масс заданных сигналов с заданной точностью (7).

#### 3.1. ЗАКОН КОМБИНИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ С КОМПЕНСАЦИЕЙ ПЕРЕКРЕСТНЫХ СВЯЗЕЙ

Запишем первое уравнение системы (1) относительно ошибок слежения  $e_1 = x_1 - \chi \in R^3$ :

$$(16) \quad \dot{e}_1 = x_2 - \dot{\chi}.$$

Согласно идеологии блочного подхода, в уравнении (16) векторная переменная  $x_2$  трактуется как фиктивное управление, которое выберем в виде сигма-функций:

$$x_2 = -M_1\sigma(K_1e_1), \quad M_1 = \text{diag}(m_i), \quad K_1 = \text{diag}(k_{1i}), \\ m_{1i}, k_{1i} = \text{const} > 0, i = \overline{1,3}.$$

Здесь и далее  $\sigma(K_1e_1)$  – обозначение вектора, элементами которого являются сигма-функции от элементов вектора  $K_1e_1$ , а именно:  $\sigma(K_1e_1) = (\sigma(k_{11}e_{11}), \sigma(k_{12}e_{12}), \sigma(k_{13}e_{13}))^T$ .

Введя невязку между реальным и желаемым фиктивным управлением

$$(17) e_2 = x_2 + M_1 \sigma(K_1 e_1),$$

получим систему с замкнутыми локальными связями

$$(18) \begin{aligned} \dot{e}_1 &= -M_1 \sigma(K_1 e_1) + e_2 - \dot{\chi}, \\ \dot{e}_2 &= ag + 0,5M_1 K_1 \Lambda_1 (x_2 - \dot{\chi}) + B(\theta, \Psi)(u + \eta), \end{aligned}$$

где  $\Lambda_1 = \text{diag}(1 - \sigma^2(k_{1i} e_{1i}))$ ,  $i = \overline{1,3}$ . В системе (18) не только  $\eta(t)$ , но и  $\dot{\chi}(t)$  трактуются как внешние неизвестные ограниченные возмущения.

Для компенсации перекрестных связей в системе (18) вводится комбинированное управление с сигмоидальной стабилизирующей составляющей вида:

$$(19) u = -B^T(\theta, \Psi)(M_2 \sigma(K_2 e_2) + ag + 0,5M_1 K_1 \Lambda_1 x_2),$$

$$M_2 = \text{diag}(m_{2i}), \quad K_2 = \text{diag}(k_{2i}), \quad m_{2i}, k_{2i} = \text{const} > 0, \quad i = \overline{1,3},$$

что приведет к замкнутой системе

$$(20) \begin{aligned} \dot{e}_1 &= -M_1 \sigma(K_1 e_1) + e_2 - \dot{\chi}, \\ \dot{e}_2 &= -M_2 \sigma(K_2 e_2) + \varphi, \quad \varphi = B(\theta, \Psi)\eta - 0,5M_1 K_1 \Lambda_1 \dot{\chi}. \end{aligned}$$

В силу (3), (5) для элементов вектора  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$  справедливы следующие оценки:

$$|\phi_i(t)| \leq \bar{\varphi}_i = N + 0,5m_{1i}k_{1i}Y_{1i}, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad N = N_1 + N_2 + N_3.$$

Задача синтеза сводится к выбору параметров сигмоидальных обратных связей (17), (19), обеспечивающих (7). Амплитуды  $m_{ji}$  выбираются так, чтобы обеспечить последовательное попадание переменных системы (20) в указанные области:

$$(21) \begin{aligned} |e_{2i}(t)| &\leq c/k_{2i} \leq \delta_{2i}, \quad t > t_2 > 0; \\ |e_{1i}(t)| &\leq c/k_{1i} \leq \delta_{1i}, \quad t > t_1 > t_2, \quad i = 1, 2, 3, \quad c \in [1,3; 3], \end{aligned}$$

а выбор больших коэффициентов  $k_{ji}$  обеспечивает желаемые границы этих областей.

Согласно идеологии блочного принципа управления переходный процесс по переменным  $e_2$  является аperiодическим:

$$|e_{2i}(t)| \leq |e_{2i}(0)|, \quad t \geq 0,$$

что в силу  $x_2 = e_2 - M_1 \sigma(K_1 e_1)$  (17) гарантирует выполнение проектных ограничений по скорости (7) при условии  $m_{1i} < X_{1i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Тогда в первом уравнении (20) переменные  $e_{2i}(t)$  можно трактовать как внешние, затухающие возмущения, однако для переменных  $e_{1i}(t)$  монотонное убывание по модулю гарантируется только при  $t > t_2$ , когда  $|e_{2i}(t)| \leq c/k_{2i}$ . Достаточные условия для выбора амплитуд имеют вид, аналогичный (10):

$$(22) \quad \begin{aligned} (c/k_{2i} + Y_{1i})/\sigma(c) < m_{1i} < X_{1i}, \\ (N + 0,5m_{1i}k_{1i}Y_{1i})/\sigma(c) < m_{2i}, \quad N = N_1 + N_2 + N_3. \end{aligned}$$

Время переходных процессов невязок оценивается аналогично (11).

Алгоритм настройки параметров закона управления (19):

1) при принятом значении  $c^* \in [1, 3; 3]$  и заданных  $\delta_{1i}$  определяются большие коэффициенты в первом блоке  $k_{1i}^* \geq c^* / \delta_{1i}$ ;

2) на основе первого неравенства (22) фиксируются значения амплитуд в первом блоке  $Y_{1i} / \sigma(c^*) < m_{1i}^* < X_{1i}$  и определяются большие коэффициенты во втором блоке:

$$k_{2i}^* \geq c^* / (m_{1i}^* \sigma(c^*) - Y_{1i});$$

3) на основе второго неравенства (22) фиксируются значения амплитуд во втором блоке  $m_{2i}^* > (N + 0,5m_{1i}^*k_{1i}^*Y_{1i}) / \sigma(c^*)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Данный подход гарантирует, что для всех  $t \geq 0$  управления и, следовательно, ускорение БПЛА, будут ограничены:

$$|u_i(t)| \leq g + \sum_{j=1}^3 (m_{2j}^* + 0,5m_{1j}^*k_{1j}^*X_{1i}) = U, \quad i = \overline{1, 3}, \quad \|\dot{x}_2\| \leq U + N.$$

При проектировании БПЛА данное неравенство является основой для выбора исполнительных устройств определенной мощности при заданном диапазоне режимов полета и точности отслеживания (7). И, наоборот, для конкретного БПЛА с имеющимися ограничениями  $\|u\| \leq U$ ,  $\|\dot{x}_2\| \leq U + N \leq X_2$  оно является основой для планирования рабочих режимов и расчета возможной точности отслеживания при наихудших допустимых внеш-

них воздействиях (5).

Для реализации закона управления (19) требуются следующие сигналы:  $x_2(t)$ ,  $\theta(x_2(t))$ ,  $\Psi(x_2(t))$ ,  $e_2(x_1(t), \chi_1(t), x_2(t))$ . Учитывая, что  $x_1(t), \chi(t)$  измеряются, ставится задача оценивания переменных  $x_2(t)$  с помощью динамического наблюдателя состояния, построенного на основе системы (1). Полученные оценки будут использованы для вычисления в реальном времени переменных  $e_2(t)$  (17), а также синусов и косинусов от углов пути  $\Psi(t)$  и наклона траектории  $\theta(t)$  (4).

Система (1) является наблюдаемой относительно выходных переменных  $x_1$ , однако из-за наличия во втором уравнении внешних возмущений задачу оценивания  $x_2(t)$  может быть решена только с заданной точностью. Для упрощения структуры наблюдателя и сокращения вычислений, выполняемых в реальном времени, предлагается использовать наблюдатель пониженного порядка, построенный как реплика первого уравнения системы (1) в виде

$$(23) \quad \dot{z} = v(\varepsilon),$$

где  $z \in R^3$  – вектор состояния,  $v = (v_1, v_2, v_3)^T$  – вектор корректирующих воздействий наблюдателя,  $\varepsilon = x_1 - z \in R^3$  – вектор ошибок наблюдения. В отличие от стандартных редуцированных наблюдателей, где отбрасывается динамика измеряемых переменных [15, 20], здесь, наоборот, отбрасывается динамика неизмеряемых  $x_2$ , которые в уравнении, записанном относительно ошибок наблюдения  $\dot{\varepsilon} = x_2 - v$ , трактуются как внешние, ограниченные возмущения (6). Задача наблюдения сводится к стабилизации ошибок наблюдения и их производных, тогда оценки неизмеряемых сигналов будут получены с помощью корректирующих воздействий наблюдателя (23). Из-за отбрасывания динамической модели «внешних возмущений» данная задача может быть решена только с заданной точностью:

$$(24) \quad \|\varepsilon(t)\| \leq \alpha, t > t_{01} \geq 0, \|\dot{\varepsilon}(t)\| = \|x_2(t) - v(t)\| \leq \alpha, t > t_0 > t_{01}, t_0 < t_2.$$

При  $t > t_0$  корректирующие воздействия служат оценками

«внешнего возмущения»  $v_i(t) = x_{2i}(t) \pm \alpha$  и используются для вычисления переменной  $\tilde{\varepsilon}_2 = v + M_1 \sigma(K_1 e_1)$  (17) и элементов матрицы  $B^T(\theta, \Psi)$  по формулам (4).

В качестве корректирующих воздействий, обеспечивающих (24), обычно используются разрывные [8, 23, 25] или линейные корректирующие воздействия с большими коэффициентами [3, 17, 21]. Однако эти методы требуют расширения пространства состояния наблюдателя, и, кроме того, системы с глубокими обратными связями обычно характеризуются значительным всплеском вначале переходного процесса. Поэтому, так же как и в задаче управления, целесообразно использовать  $S$ -образные ограниченные корректирующие воздействия. В отличие от локальных обратных связей, где имеются физические ограничения на гладкость сигналов, в наблюдателе можно вместо нелинейных сигма-функций использовать более простые в реализации негладкие кусочно-линейные корректирующие воздействия [5, 11, 18]:

$$(25) \quad v_i = psat(l\varepsilon_i) = \begin{cases} p \operatorname{sign} \varepsilon_i, & |\varepsilon_i| > 1/l; \\ pl\varepsilon_i, & |\varepsilon_i| \leq 1/l, p, l > 0, i = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

С учетом (6), (25) амплитуда корректирующих воздействий  $p$  выбирается аналогично (10) из достаточных условий

$$(26) \quad \varepsilon^T \dot{\varepsilon} = \varepsilon^T (x_2 - v) \leq \|\varepsilon\| (X_1 - p) < 0 \Rightarrow p > X_1,$$

что при  $\|\varepsilon_i(0)\| > 1/l$  за конечное время  $t_{01} > 0$  (11) обеспечивает сходимость ошибок наблюдения в линейную зону, а при  $\|\varepsilon_i(0)\| < 1/l$  ошибки наблюдения не выйдут из нее. Тогда при  $t > t_{01} \geq 0$  дифференциальные уравнения для ошибок наблюдения и их производных примут вид:

$$\dot{\varepsilon} = x_2 - pl\varepsilon, \quad \ddot{\varepsilon} = \dot{x}_2 - pl\dot{\varepsilon},$$

где  $\dot{x}_2$  трактуется как ограниченное возмущение  $\|\dot{x}_2(t)\| \leq X_2$ .

Выбором  $l$  обеспечивается желаемая точность оценивания (24). С этой целью используем второй метод Ляпунова. Из анализа производной квадратичной формы  $W = 0,5(\varepsilon^T \varepsilon + \dot{\varepsilon}^T \dot{\varepsilon})$ ,

а именно:

$$\dot{W} = \varepsilon^T \dot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon}^T \dot{\varepsilon} \leq \|\varepsilon\| (X_1 - p l \|\varepsilon\|) + \|\dot{\varepsilon}\| (X_2 - p l \|\dot{\varepsilon}\|),$$

следует, что неравенство  $\dot{W} < 0$  будет выполнено вне областей (24) при выборе большого коэффициента на основе неравенства

$$(27) \quad l > \frac{1}{p(\alpha - \bar{\alpha})} \max\{X_1, X_2\},$$

где  $\alpha - \bar{\alpha} > 0$ ,  $\bar{\alpha}$  служит оценкой для области сходимости устойчивых собственных движений переменных  $\varepsilon(t)$ ,  $\dot{\varepsilon}(t)$  за заданное время при начальных условиях  $\varepsilon(0)$ , которые при измерении  $x_1(t)$  можно установить произвольно с учетом ограничений  $x_{21}^2(t) + x_{23}^2(t) \neq 0 \Rightarrow \varepsilon_{21}(0) \neq 0$  и  $\varepsilon_{23}(0) \neq 0$ .

Таким образом, представленный закон управления в виде динамической обратной связи решает поставленную задачу (7). При этом обеспечивает инвариантность по отношению к внешним возмущениям без использования динамических генераторов задающих воздействий и возмущений, гарантируется ограниченность элементов векторов скорости, ускорения и управления, однако требуется выполнять плохо обусловленные вычисления элементов матрицы  $B^T$  в реальном времени, что приводит к снижению точности отслеживания по сравнению с расчетными значениями (7). Далее рассматривается альтернативный метод синтеза динамической сигмоидальной обратной связи, имеющий такие же преимущества, но лишенный указанных недостатков.

### 3.2. МЕТОД ИЕРАРХИИ УПРАВЛЕНИЙ

В уравнении относительно ошибки слежения (16) выберем комбинированное фиктивное управление  $x_2$  с сигмоидальным слагаемым  $x_2 = \dot{\chi} - M_1 \sigma(K_1 e_1)$ , введем невязку между реальным и желаемым фиктивным управлением

$$(28) \quad e_2 = x_2 - \dot{\chi} + M_1 \sigma(K_1 e_1)$$

и получим систему с замкнутыми локальными связями

$$(29) \quad \begin{aligned} \dot{e}_1 &= -M_1 \sigma(K_1 e_1) + e_2, \\ \dot{e}_2 &= B(u + \eta) + \phi, \end{aligned}$$

где элементы векторов  $\eta(t)$  и  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T$ ,

$$\phi = ag + \ddot{\chi} + 0,5M_1 K_1 \Lambda_1 (x_2 - \dot{\chi})$$

тракуются как внешние, ограниченные возмущения

$$(30) \quad \begin{aligned} |\phi_i(t)| &\leq Y_{2i} + 0,5m_{1i}k_{1i}(X_{1i} + Y_{1i}) = \Phi_i, i=1,3, \\ |\phi_2(t)| &\leq g + Y_{22} + 0,5m_{12}k_{12}(X_{12} + Y_{12}) = \Phi_2, t \geq 0. \end{aligned}$$

С целью избежать вычислений элементов матрицы  $B^T(\theta, \Psi)$  в реальном времени предлагается использовать чисто сигмоидальное истинное управление. Тогда в замкнутой системе перед управлением останется матрица  $B$ , которая имеет общий вид (3). Для настройки параметров управления используем метод иерархии управлений, который был предложен для элементарных систем с разрывными управлениями [23]. Идея метода заключается в том, что в замкнутой системе согласно установленной иерархии (которая, например, совпадает с порядковыми номерами переменных) последовательно, сверху вниз, за конечное время организуются идеальные скользящие режимы на соответствующих поверхностях переключения. После возникновения скользящего режима на соответствующей поверхности, согласно методу эквивалентного управления, из текущего уравнения статики (т.е. полагая соответствующую производную тождественно равной нулю) можно последовательно выразить непрерывные (эквивалентные) управления и подставить их в нижние уравнения. В итоге матрица перед управлением примет верхнетреугольный вид, что является основой для иерархического, снизу вверх, выбора амплитуд разрывных управлений, обеспечивающих стабилизацию элементарной системы в установленном порядке. При допредельной реализации разрывных управлений с помощью  $S$ -образных обратных связей [7, 12, 19] в системах с внешними возмущениями следует учитывать, что стабилизация переменных состояния и их производных возможна только с заданной точностью. Иными словами, в данных построениях (в отличие от систем с идеальными скользящими



режимами) следует учитывать ненулевые значения производных «верхних» переменных при выборе амплитуд «нижних» управлений.

Рассмотрим соответствующую процедуру применительно ко второму уравнению системы (29), в котором установим иерархию сходимости переменных, совпадающую с их порядковыми номерами. Для имитации изложенного метода введем преобразующую нижнетреугольную матрицу  $Q$ , умножение на которую слева обеспечивает верхнетреугольный вид матрицы  $B$ :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q_2 & 1 & 0 \\ q_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad q_2 = -\operatorname{tg}\theta / \cos\Psi, \quad q_3 = \operatorname{tg}\Psi,$$

$$(31) \quad QB = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\Psi & -\sin\theta \cos\Psi & \sin\Psi \\ 0 & 1/\cos\theta & -\operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\Psi \\ 0 & 0 & 1/\cos\Psi \end{pmatrix} = (b_{ij}).$$

В сделанных предположениях  $|\theta(t)| < \pi/2$ ,  $|\Psi(t)| < \pi/2$ ,  $t \geq 0$ , диагональные элементы преобразованной матрицы положительные  $0 < \bar{b}_{ii} \leq b_{ii} \leq \bar{\bar{b}}_{ii}$ ,  $i = \overline{1,3}$ , что диктует следующий закон сигмоидального управления:

$$(32) \quad u = -M_2 \sigma(K_2 e_2),$$

$$M_2 = \operatorname{diag}(m_{2i}), \quad K_2 = \operatorname{diag}(k_{2i}), \quad m_{2i}, k_{2i} = \operatorname{const} > 0, \quad i = \overline{1,3}.$$

Для регуляризации процедуры настройки умножим обе части второго уравнения системы (29) на преобразующую матрицу:

$$(33) \quad Q\dot{e}_2 = Q(B(u + \eta) + \phi) \Leftrightarrow \dot{\bar{e}}_2 = QB(u + \eta) + \bar{\phi},$$

$$\bar{\phi} = \begin{pmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \\ \bar{\phi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 + q_2(\phi_1 - \dot{e}_{21}) \\ \phi_3 + q_3(\phi_1 - \dot{e}_{21}) \end{pmatrix}.$$

Система (33) является основой для выбора снизу вверх амплитуд сигмоидальных управлений с учетом установленной иерархии сходимости:

- 1)  $|e_{21}(t)| \leq c/k_{21} \leq \delta_{21}, |\dot{e}_{21}(t)| \leq \Delta_{21}, t > t_{21} > 0;$
- 2)  $|e_{22}(t)| \leq c/k_{22} \leq \delta_{22}, t > t_{22} > t_{21};$

$$3) |e_{23}(t)| \leq c/k_{23} \leq \delta_{23}, t > t_{23} > t_{22}, t_{23} \leq t_2, c \in [1, 3; 3],$$

т.е. выбор амплитуд  $m_{23}, m_{22}$  выполняется в предположении  $|e_{21}(t)| \leq \delta_{21}, |\dot{e}_{21}(t)| \leq \Delta_{21}$  (14).

Из практических соображений примем  $|\theta(t)| \leq 0,45\pi$ ,  $|\Psi(t)| \leq 0,45\pi$ . Тогда нижние оценки диагональных элементов матрицы  $QB$  (31)  $0 < \bar{b}_{ii} \leq b_{ii}$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , и верхняя оценка  $|b_{23}| \leq \bar{b}_{23}$  определяются с учетом расчетных значений

$$\cos(0,45\pi) \approx 0,17, 1/\cos(0,45\pi) \approx 5,76, \operatorname{tg}(0,45\pi) \approx 5,7,$$

$$|q_2(t)| \leq 33 = \bar{q}_2, |q_3(t)| \leq 5,7 = \bar{q}_3, |b_{12}| < 1, |b_{13}| < 1,$$

а для элементов вектора  $\bar{\phi}$  в системе (33) с учетом (30) имеем:

$$|\bar{\phi}_1(t)| \leq \Phi_1, |\bar{\phi}_2(t)| \leq \Phi_2 + \bar{q}_2(\Phi_1 + \Delta_{21}) = \bar{\Phi}_2,$$

$$|\bar{\phi}_3(t)| \leq \Phi_3 + \bar{q}_3(\Phi_1 + \Delta_{21}) = \bar{\Phi}_3.$$

Как и в предыдущем случае, данный подход гарантирует, что для всех  $t \geq 0$  управляющие воздействия будут ограничены:

$$|u_i(t)| \leq m_{2i}, i = 1, 2, 3.$$

Аналогично (22), диапазон для выбора амплитуд сигма-функций в первом уравнении (29) имеет вид

$$(34) c/(k_{2i}\sigma(c)) < m_{1i} < X_{1i} - Y_{1i}, i = \overline{1, 3},$$

где верхнее ограничение, введенное с учетом выбора фиктивного управления  $x_2 = \dot{\chi} - M_1\sigma(K_1e_1)$ , служит для обеспечения выполнения проектных ограничений по скорости в процессе управления. Однако, в отличие от замкнутой системы (20), в замкнутой системе (29), (32) переходный процесс является аperiodическим только для  $e_{21}(t)$ . Для переменных  $e_{22}(t)$ ,  $e_{23}(t)$  монотонная сходимось в указанные окрестности гарантируется только при  $t > t_{21}$ . Как следствие, проектные ограничения по соответствующим элементам вектора скорости в силу  $x_{2i} = \dot{\chi}_i + e_{2i} - m_{1i}\sigma(k_{1i}e_{1i})$  могут быть незначительно нарушены в начале переходного процесса.

Алгоритм настройки параметров закона управления (32):

1) при принятом значении  $c^* \in [1,3; 3]$  и заданных  $\delta_{li}$  определяются  $k_{li}^* \geq c^* / \delta_{li}$ ;

2) на основе неравенства (34) фиксируются значения амплитуд в первом блоке  $0 < m_{li}^* < X_{li} - Y_{li}$  и определяются большие коэффициенты во втором блоке

$$k_{2i}^* \geq c^* / (m_{li}^* \sigma(c^*)), \quad i = \overline{1,3};$$

3) на основе системы (33) снизу вверх определяются

$$m_{23}^* > \frac{1}{\sigma(c^*)} \left( N_3 + \frac{\overline{\Phi}_3}{\overline{b}_{33}} \right),$$

$$m_{22}^* > \frac{1}{\sigma(c^*)} \left( N_2 + \frac{\overline{b}_{23}(m_{23}^* + N_3) + \overline{\Phi}_2}{\overline{b}_{22}} \right),$$

$$m_{21}^* > \frac{1}{\sigma(c^*)} \left( N_1 + \frac{m_{22}^* + N_2 + m_{23}^* + N_3 + \overline{\Phi}_1}{\overline{b}_{11}} \right).$$

Для реализации закона управления (32) требуется только смешанная переменная  $e_2(t) = x_2(t) - \dot{\chi}(t) + M_1 \sigma(K_1 e_1(t))$ . Учитывая, что ошибка слежения  $e_1(t) = x_1(t) - \chi(t)$  измеряется, оценку  $e_2(t)$  можно получить с помощью редуцированного наблюдателя, аналогичного (23), но построенного на основе первого уравнения преобразованной системы (29) в виде:

$$(35) \quad \dot{z} = -M_1 \sigma(K_1 e_1) + v(\varepsilon),$$

что приведет к следующей системе, записанной относительно ошибок наблюдения  $\varepsilon = e_1 - z \in R^3$ :

$$(36) \quad \dot{\varepsilon} = e_2 - v(\varepsilon),$$

где  $\|e_2(t)\| = X_1 + Y_1 + \max\{m_{11}, m_{12}, m_{13}\} = E$ ,

$$\|\dot{e}_2(t)\| \leq \sum_{i=1}^3 m_{2i}^* + N + \max\{\overline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_2, \overline{\Phi}_3\} = \overline{E}, \quad t \geq 0.$$

В данном случае также используем кусочно-линейные корректирующие воздействия (25), неравенства для выборов параметров которых имеют вид, аналогичный (26), (27), а именно:

$$(37) \quad p > E, \quad l > \frac{1}{p(\alpha - \bar{\alpha})} \max\{E, \bar{E}\}.$$

В отличие от наблюдателя для оценивания скоростей пространственных переменных в данном случае нет ограничений на начальные условия, поэтому можно установить  $z(0) = e_1(0) \Rightarrow \varepsilon(0) = \vec{0}$ , тогда

$$(38) \quad \|\varepsilon(t)\| \leq \alpha, \quad t \geq 0, \quad \|\dot{\varepsilon}(t)\| = \|e_2(t) - v(t)\| \leq \alpha, \quad t > t_0 > 0, \quad t_0 < t_2,$$

и базовый закон управления будет реализован в виде:

$$(39) \quad u = -M_2 \sigma(K_2 v).$$

Данный метод более трудоемкий на подготовительной стадии, но зато существенно упрощает структуру регулятора и объем вычислений, выполняемых в реальном времени.

#### 4. Результаты моделирования

В качестве объекта рассматривался микро БПЛА весом до 5 кг, который может подниматься на высоту до 5 км. Электрический двигатель обеспечивает ему скорость до 95 км/ч (26 м/с), в воздухе может находиться до одного часа. Такие летательные аппараты могут выполнять разведывательные функции и предоставлять информацию о текущей обстановке.

Численное моделирование разработанных алгоритмов проводилось в среде MATLAB-Simulink с методом интегрирования Эйлера с постоянным шагом в 0,001. Для системы (1) с начальными условиями  $x_1(0) = (0; 100; 1)^T$  при действии внешних возмущений

$$\eta_1(t) = 0,2 \sin t, \quad \eta_2(t) = 0,24 \sin t, \quad \eta_3(t) = 0,9 \cos t$$

ставилась задача вывода центра масс БПЛА на пространственную траекторию:

$$\chi_1(t) = 9 \sin(t/9), \quad \chi_2(t) = t + 100, \quad \chi_3(t) = 9 \cos(t/9).$$

На основе неравенств (21)–(22) были приняты следующие параметры первого регулятора (19):

$$K_1 = \text{diag}(105; 90; 95), \quad K_2 = \text{diag}(4,84; 1,61; 4,4),$$

$$M_1 = \text{diag}(2; 4; 2), \quad M_2 = \text{diag}(30; 27; 38).$$

На рис. 1–2 для замкнутой эталонной системы (1), (19) (в предположении, что все сигналы, по которым формируется обратная связь, доступны для измерения), показаны графики ошибок слежения  $e_{1i}(t) = x_{1i}(t) - \chi_i(t)$  [м] и  $x_{2i}(t)$  [м/с] соответственно,  $i = \overline{1,3}$ . Как видно из рис. 2, в замкнутой системе выполняются проектные ограничения по скорости (6):  $|\dot{x}_{1i}(t)| \leq 26$  [м/с],  $i = \overline{1,3}$  (6).

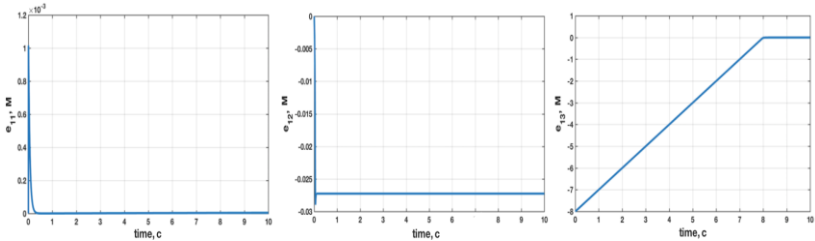


Рис. 1. Графики ошибок слежения  $e_{1i}(t) = x_{1i}(t) - \chi_i(t)$  [м],  $i = \overline{1,3}$ , в замкнутой системе (1), (19) с полными измерениями

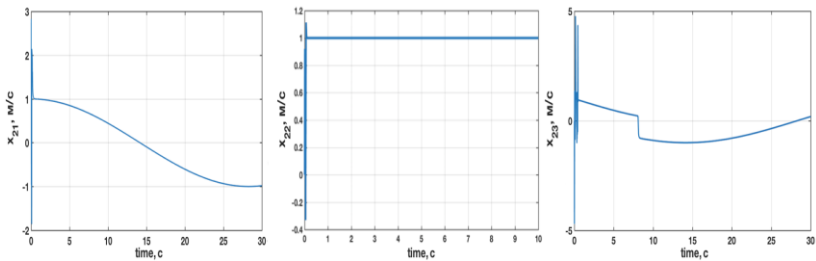


Рис. 2. Графики элементов вектора скорости  $x_{2i}(t)$  [м/с],  $i = \overline{1,3}$

При моделировании системы с измерениями  $x_1(t)$ ,  $\chi(t)$  и наблюдателем (23), (25) на основе неравенств (26) были приняты следующие параметры корректирующих воздействий:

$$p = 24, l = 400.$$

На рис. 3–4 для системы (1), (19), замкнутой через наблюдатель состояния (23), (25), показаны графики ошибок оценива-

ния неизмеряемых сигналов  $x_{2i}(t) - v_i(t)$  [м/с] и ошибок слежения  $e_{1i}(t) = x_{1i}(t) - \chi_i(t)$  [м] соответственно,  $i = \overline{1,3}$ . На рис. 5 показан процесс слежения центра масс  $x_1(t)$  за заданной пространственной траекторией  $\chi(t)$  (пунктирная линия).

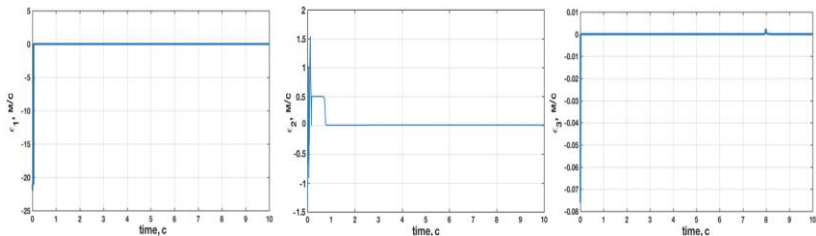


Рис. 3. Графики ошибок наблюдения  $x_{2i}(t) - v_i(t)$  [м/с],  $i = \overline{1,3}$ , в замкнутой системе (1), (19) с наблюдателем (23), (25)

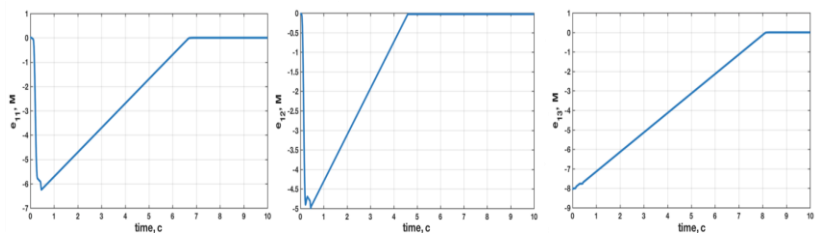


Рис. 4. Графики ошибок слежения  $e_{1i}(t) = x_{1i}(t) - \chi_i(t)$  [м],  $i = \overline{1,3}$ , в замкнутой системе (1), (19) с наблюдателем (23), (25)

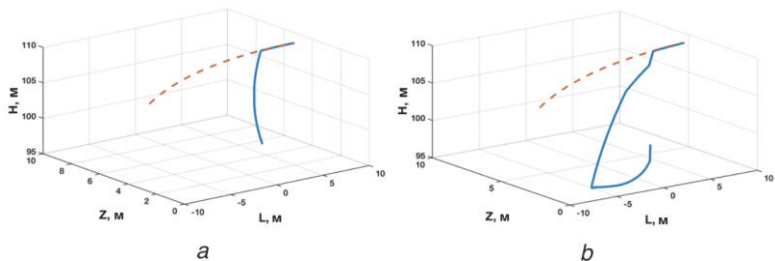


Рис. 5. Пространственные графики изображающей точки эталонной системы (а) и системы с наблюдателем (б)

В таблице 1 представлены оценки сходимости ошибок слежения для замкнутых систем с законом управления (19) со статической и динамической обратной связью.

Таблица 1. Параметры сходимости ошибок слежения

	Максимальное абсолютное отклонение [м] ошибок слежения от нуля	Время переходного процесса $T$ [с]: $ e_{i_1}(t)  \leq 0,03$ [м], $t > T$	Ошибка стабилизации [м] в установившемся режиме при $t > 10$ [с]
Эталонная система (1) со статической обратной связью (19)	$ e_{11}(0,003)  = 1 \times 10^{-3}$	0,00	$ e_{11}(t)  \leq 3 \times 10^{-6}$
	$ e_{12}(0,055)  = 3 \times 10^{-2}$	0,00	$ e_{12}(t)  \leq 2,7 \times 10^{-2}$
	$ e_{13}(0)  = 8,0$	7,97	$ e_{13}(t)  \leq 2,5 \times 10^{-6}$
Система (1) с динамической обратной связью (19), (23), (25)	$ e_{11}(0,220)  = 5,4$	5,58	$ e_{11}(t)  \leq 3 \times 10^{-6}$
	$ e_{12}(0,123)  = 1,4$	1,60	$ e_{12}(t)  \leq 3 \times 10^{-2}$
	$ e_{13}(0,012)  = 8,1$	8,03	$ e_{13}(t)  \leq 2,5 \times 10^{-6}$

На рис. 6–7 для замкнутой эталонной системы (1) со статической обратной связью (32) с параметрами

$$M_1 = [2; 2; 2], K_1 = [90; 100; 65],$$

$$M_2 = [18; 14; 12], K_2 = [1650; 1450; 1250]$$

показаны графики ошибок слежения  $e_{i_1}(t) = x_{i_1}(t) - \chi_{i_1}(t)$  [м] и  $x_{2i}(t)$  [м/с] соответственно,  $i = \overline{1,3}$ . Как видно из рис. 7, в замкнутой системе в данном случае также выполняются проектные ограничения по скорости (6):  $|\dot{x}_{i_1}(t)| \leq 26$  [м/с],  $i = \overline{1,3}$  (6).

При моделировании системы с измерениями  $x_1(t)$ ,  $\chi(t)$  и наблюдателем (35) с кусочно-линейной коррекцией (25) на основе неравенств (37) были приняты следующие параметры:

$$p = 14, l = 1350.$$

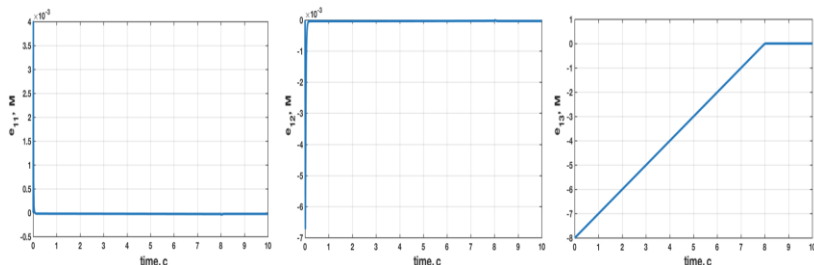


Рис. 6. Графики ошибок слежения  $e_{1i}(t) = x_{1i}(t) - \chi_i(t)$  [м],  $i = \overline{1,3}$ , в замкнутой системе (1), (32) с полными измерениями

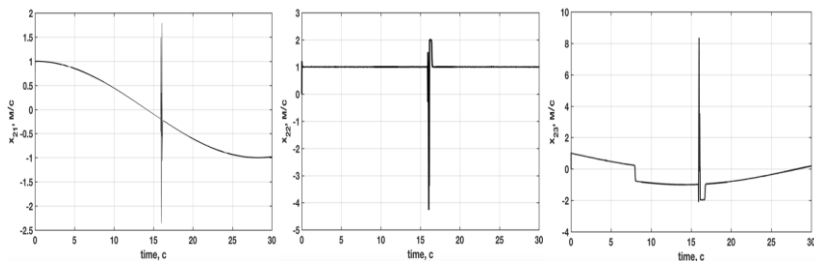


Рис. 7. Графики элементов вектора скорости  $x_{2i}(t)$  [м/с],  $i = \overline{1,3}$

На рис. 8–9 для системы (1), (32), замкнутой через наблюдатель состояния (35), показаны графики ошибок оценивания неизмеряемых сигналов  $x_{2i}(t) - v_i(t)$  [м/с] и ошибок слежения  $e_{1i}(t) = x_{1i}(t) - \chi_i(t)$  [м] соответственно,  $i = \overline{1,3}$ . На рис. 10 показан процесс слежения центра масс  $x_1(t)$  за заданной пространственной траекторией  $\chi(t)$  (пунктирная линия).

В таблице 2 представлены оценки сходимости ошибок слежения для замкнутых систем с регулятором (32) со статической и динамической обратной связью.



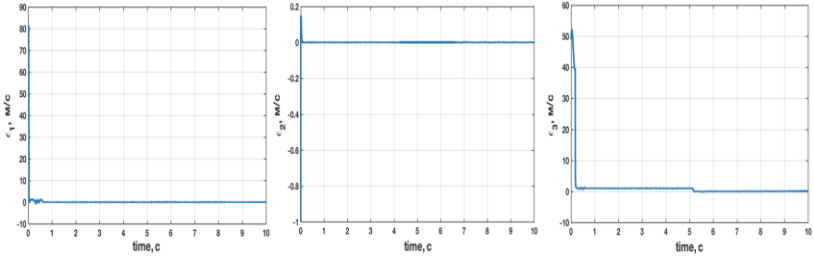


Рис. 8. Графики ошибок наблюдения  $x_{2i}(t) - v_i(t)$  [м/с],  $i = \overline{1,3}$ , в замкнутой системе с наблюдателем (35), (25)

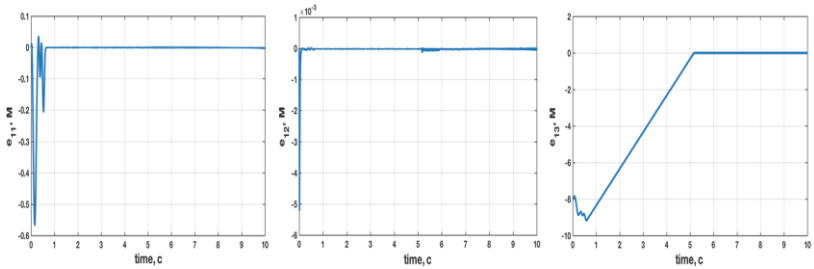


Рис. 9. Графики ошибок слежения  $e_{1i}(t) = x_{1i}(t) - \chi_i(t)$  [м],  $i = \overline{1,3}$  в замкнутой системе (1), (32) с наблюдателем (35), (25)

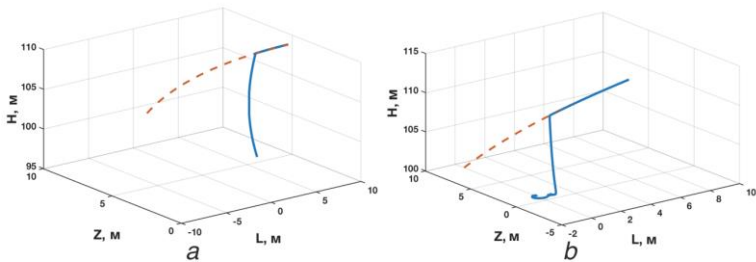


Рис. 10. Пространственные графики изображающей точки эталонной системы (а) и системы с наблюдателем (б)

Таблица 2. Параметры сходимости ошибок слежения

	Максимальное абсолютное отклонение [м] ошибок слежения от нуля	Время переходного процесса $T$ [с]: $ e_{1i}(t)  \leq 0,03$ [м], $t > T$	Ошибка стабилизации [м] в установившемся режиме при $t > 10$ [с]
Эталонная система (1) со статической обратной связью (32)	$ e_{11}(0,009)  = 5 \times 10^{-3}$	0,00	$ e_{11}(t)  \leq 3 \times 10^{-5}$
	$ e_{12}(0,013)  = 6,4 \times 10^{-3}$	0,00	$ e_{12}(t)  \leq 1,5 \times 10^{-5}$
	$ e_{13}(0)  = 8,00$	7,98	$ e_{13}(t)  \leq 2 \times 10^{-7}$
Система (1) с динамической обратной связью (32), (35), (25)	$ e_{11}(0,155)  = 0,57$	0,60	$ e_{11}(t)  \leq 3 \times 10^{-3}$
	$ e_{12}(0,010)  = 5,2 \times 10^{-3}$	0,00	$ e_{12}(t)  \leq 1,6 \times 10^{-5}$
	$ e_{13}(0,580)  = 9,18$	5,15	$ e_{13}(t)  \leq 5 \times 10^{-3}$

Исходя из данных, представленных в таблицах 1–2, можно сделать вывод о том, что разработанные алгоритмы синтеза динамической обратной связи действительно эффективны, так как обеспечивают заданную точность слежения и выполнение проектных ограничений на переменные состояния. Если сравнивать синтезированные законы управления между собой, то можно сделать вывод о том, что чисто сигмоидальная обратная связь (32) более эффективна по основным рассмотренным параметрам, однако при определенных радиусах кривизны наблюдаются всплески элементов вектора скорости, вызванные резким изменением задающего воздействия.

## 5. Заключение

Основной результат данной работы – процедуры синтеза следящей системы БПЛА с  $S$ -образными, всюду ограниченными обратными связями в виде сигма-функции с наблюдателями состояния пониженного порядка с кусочно-линейными корректирующими воздействиями, не требующими расширения про-

странства состояний за счет динамических моделей внешних воздействий. Данные подходы позволили учитывать проектные ограничения на скорость и перегрузку на стадии синтеза и обеспечить вывод центра масс БПЛА на заданную пространственную траекторию и его движение в малой окрестности заданной кривой инвариантно по отношению к внешним возмущениям.

### **Литература**

1. КАНАТНИКОВ А.Н., КРИЩЕНКО А.П. *Терминальное управление пространственным движением летательных аппаратов* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2008. – №5. – С. 51–64.
2. КАНАТНИКОВ А.Н., ЛЮ В., ТКАЧЕВ С.Б. *Путевые координаты в задаче следования вдоль пространственного пути* // Математическое моделирование. – 2017. – Т. 29, №10. – С. 5–19.
3. КОКУНЬКО Ю.Г., КРАСНОВ Д.В. *Синтез подсистемы наблюдения для беспилотного летательного аппарата при действии неконтролируемых возмущений* // XIII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2019: Труды [Электронный ресурс] 17–20 июня 2019 г., Москва / Под общ. ред. Д.А. Новикова. – М.: ИПУ РАН, 2019. – С. 928–933.
4. КОЛЕСНИКОВ А.А., КОБЗЕВ В.А. *Динамика полета и управление: синергетический подход*. – Таганрог: ТТИ ЮФУ, 2009. – 198 с.
5. КРАСНОВ Д.В., УТКИН А.В. *Синтез многофункциональной системы слежения в условиях неопределенности* // Управление большими системами. – 2017. – Вып. 69. – С. 29–49.
6. КРАСНОВА С.А. *Оценивание внешних возмущений на основе виртуальных динамических моделей* // Управление большими системами. – 2018. – Вып. 76. – С. 6–25.

7. КРАСНОВА С.А., АНТИПОВ А.С. *Иерархический синтез сигмоидальных обобщенных моментов манипулятора в условиях неопределенности* // Проблемы управления. – 2016. – №4. – С. 10–21.
8. КРАСНОВА С.А., МЫСИК Н.С. *Синтез инвариантной системы управления продольным движением летательного аппарата* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №10. – С. 104–116.
9. КРАСНОВА С.А., МЫСИК Н.С. *Каскадный синтез наблюдателя состояния с нелинейными корректирующими воздействиями* // Автоматика и телемеханика. – 2014. – №2. – С. 106–128.
10. КРАСНОВА С.А., УТКИН А.В. *Сигма-функция в задачах синтеза наблюдателей состояний и возмущений* // Проблемы управления. – 2015. – №5. – С. 27–36.
11. КРАСНОВА С.А., УТКИН В.А., УТКИН А.В. *Блочный подход к анализу и синтезу инвариантных нелинейных систем слежения* // Автоматика и телемеханика. – 2017. – №12. – С. 26–53.
12. КРАСНОВА С.А., УТКИН В.А., УТКИН А.В., НГУЕН ТХАНЬ ТИЕН. *Прямой метод синтеза системы управления рабочим органом манипулятора при неполных измерениях* // Проблемы управления. – 2008. – №1. – С. 10–18.
13. МАЛИКОВ А.И. *Синтез наблюдателей состояния и неизвестных входов для нелинейных липшицевых систем с неопределенными возмущениями* // Автоматика и телемеханика. – 2018. – №3. – С. 21–43.
14. НИКИФОРОВ В.О. *Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений*. – СПб.: Наука, 2003. – 282 с.
15. AFRI C., ANDRIEU V., BAKO L., DUFOUR P. *State and parameter estimation: a nonlinear Luenberger observer approach* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2017. – Vol. 62, No. 2. – P. 973–980.
16. BASTURK H.I., KRSTIC M. *State derivative feedback for adaptive cancellation of unmatched disturbances in unknown strict-feedback LTI systems* // Automatica. – 2014. – Vol. 50. – P. 2539–2545.

17. KHALIL H.K., PRALY L. *High-gain observers in nonlinear feedback control* // Int. Journal Robust and Nonlinear Control. – 2014. – Vol. 24, No. 6. – P. 993–1015.
18. KOCHETKOV S.A., KRASNOVA S.A., UTKIN A.V. *Analytical reservation of aircraft measuring systems via disturbances and state observers* // Proc. of the 4<sup>th</sup> IEEE Workshop on Metrology for AeroSpace. Padua, Italy. June 21–23, 2017. – P. 297–302.
19. KRASNOVA S.A., KOCHETKOV S.A. and UTKIN V.A. *Block design of tracking system under unmatched disturbances via sigmoidal feedbacks* // AIP Conference Proceedings. – Jan 27, 2017. – Vol. 1798, Issue 1. – P. 020078-1–020078-10.
20. LUENBERGER D.B. *Observers of multivariable systems* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1966. – Vol. 11, No. 2. – P. 190–197.
21. RODRIGUEZ-MATA A.E., GONZRALEZ-HERNRANDEZ I., RANGEL-PERAZA J.G., SALAZAR S., LEAL R.L. *Wind-gust compensation algorithm based on high-gain residual observer to control a quadrotor aircraft: real-time verification task at fixed point* // Int. Journal of Control, Automation, and Systems. – 2018. – Vol. 16, No. 2. – P. 856–866.
22. TEEL A.R. *A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1996. – Vol. 41, No. 9. – P. 1256–1270.
23. UTKIN V.I., GULDNER J., SHI J. *Sliding mode control in electromechanical systems* // New York: CRC Press, 2009. – 485 p.
24. XAI X. *Global frequency estimation using adaptive identifiers* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2002. – Vol. 47, No. 7. – P. 1188–1193.
25. YANG Y., WU J., ZHENG W. *Variable structure attitude control for an UAV with parameter uncertainty and external disturbance* // Procedia Engineering. – 2011. – Vol. 15. – P. 408–415.
26. ZHAI R., ZHOU Z., ZHANG W., SANG S., and LI P. *Control and navigation system for a fixed-wing unmanned aerial vehicle* // AIP Advances. – 2014. – Vol. 4, No. 3. – 10 p. – DOI: 10.1063/1.4866169.

## TWO APPROACHES TO INVARIANT TRACKING SYSTEM DESIGN FOR AN UNMANNED AIRCRAFT VEHICLE

**Julia Kokunko**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Junior Researcher (juliakokunko@gmail.com)

**Svetlana Krasnova**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doc. Sc., Professor, Principle Research Scientist (skrasnova@list.ru).

*Abstract: The problem of automatic control of the movement of the center of mass of an unmanned aircraft under the influence of external uncontrolled disturbances and measurements of only the spatial coordinates of the center of mass and their given trajectories is considered. The task is to synthesize of the control law in the form of dynamic feedback, providing tracking of the given signals invariant in relation to external disturbances with a given accuracy. Within the framework of the block approach with the use of sigmoidal feedback, providing the limits of fictitious and true controls, regulators of two types are developed. In the first controller, thanks to compensation of cross-links in the closed system the independent control of spatial coordinates of the center of mass with an independent choice of feedback parameters in each of the three loops is provided. To implement this algorithm, reduced order observer is constructed to estimate the velocity vector by measuring the center of mass vector coordinates. Based on these signals in online mode, the sines and cosines of angles of inclination of the trajectory and course are calculated in online mode, which are necessary for the formation of feedback. In the second controller, to reduce the amount of calculations performed in real time, the cross-connections are not compensated, and in a closed system the matrix before the control is not diagonal. In order to select the feedback parameters, a hierarchical procedure has been developed with the matrix form before control conversion to an offline upper triangular. To implement this algorithm, reduced order observer was constructed to estimate the vector of derivative tracking errors by measuring the tracking error vector. The results of numerical modeling and joint analysis of the developed regulators are given.*

Keywords: unmanned aerial vehicle, tracking, invariance, sigma function, reduced order observer.

УДК 62.50

ББК 32.817

DOI: 10.25728/ubs.2020.85.6

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.А. Уткиным.*

*Поступила в редакцию 25.11.2019.*

*Опубликована 31.05.2020.*