ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПАРАМЕТРОВ

Вересников Г. С.[1]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

На предварительных этапах проектирования технических объектов нередко имеет место эпистемическая неопределенность, связанная с необходимостью формирования проектных решений с использованием экспертных данных. Для моделирования эпистемической неопределенности, возникающей при получении информации о параметрах проектируемого технического объекта от экспертов, была выбрана теория неопределенности Б. Лю, в которой выведены аналитические выражения для функций, зависящих от параметров с эпистемической неопределенностью, что обеспечивает высокую вычислительную эффективность при выполнении оптимизационных расчетов. В статье предлагаются оптимизационные модели, разработанные в рамках теории неопределенности, для решения задач параметрического синтеза проектных решений при предварительном проектировании технических объектов. В этих моделях используются критерии оптимизации, позволяющие обеспечить надежность и робастность проектных решений. Для применения разработанных оптимизационных моделей выводятся аналитические выражения числовых характеристик целевых функций и ограничений, зависящих от неопределенных входных и оптимизируемых параметров. Использование этих аналитических выражений позволяет решить проблему неопределенности оптимизируемых параметров, связанную с необходимостью учета допусков на производстве, по которым отсутствуют статистика, и с итерационным характером процесса проектирования сложных технических объектов, в котором оптимизируемые параметры могут подвергаться корректировке.

Ключевые слова: эпистемическая неопределенность, оптимизационная модель, теория неопределенности, робастность, надежность.

1. Введение

Параметрический синтез является одной из наиболее актуальных задач при предварительном проектировании техниче-

---

[1] *Георгий Сергеевич Вересников, к.т.н.* (veresnikov@mail.ru).

ских объектов (ТО). Под параметрическим синтезом понимается процесс определения (синтеза) параметров при заданной структуре проектируемого ТО.

Данные о проектируемом ТО нередко являются результатом обработки экспертной или статистической информации, и в этом случае параметры ТО представлены недетерминированными величинами, точные значения которых неизвестны в момент принятия проектных решений. Задача осложняется тем, что технические требования к проектируемому ТО часто имеют сложную структуру, трудно формализуемые взаимосвязи, противоречивы.

Для преодоления отмеченных трудностей во многих прикладных областях выработаны методологические подходы к решению задач параметрического синтеза при предварительном проектировании ТО. Традиционно выделяются взаимосвязанные локальные задачи, в рамках которых с использованием сложившихся на практике методик и математических моделей определяются соответствующие параметры ТО при зафиксированных остальных параметрах. Необходимость учета большого количества исходной информации, взаимосвязей между несколькими локальными задачами проектирования ТО, достижения компромисса между техническими требованиями является причиной того, что параметрический синтез проектных решений при предварительном проектировании сложных ТО нередко представляет собой итерационный процесс, предполагающий решение многокритериальных оптимизационных задач, в которых параметры целевых функций и ограничений являются недетерминированными.

Когда детерминированные значения параметров ТО неизвестны, применение оптимизационных моделей, предназначенных для вычислений с точными значениями, может привести к недопустимым решениям. В связи с этим необходимость учета неопределенности параметров ТО в задачах параметрического синтеза в настоящее время повсеместно признана, а научные исследования в данной области имеют высокую практическую значимость.

В случае недетерминированности параметров применение методов, в основе которых лежит алеаторная неопределённость, не всегда возможно из-за отсутствия статистических данных. В связи с этим на предварительных этапах проектирования нередко получают информацию о параметрах ТО от экспертов, т.е. имеет место эпистемическая неопределенность.

В статье проблема параметрического синтеза рассматривается в рамках класса задач непрерывной оптимизации. В этих задачах формализованы требования к ТО: заданы целевые функции и ограничения, которым должны удовлетворять проектные решения. Входные и оптимизируемые параметры, заданные областью допустимых значений, в пределах локальной задачи синтеза параметров ТО считаются независимыми.

2. Анализ проблемы параметрического синтеза проектных решений в условиях неопределенности параметров

Обычно задача математического и алгоритмического обеспечения параметрического синтеза на предварительных этапах проектирования ТО решается в системах инженерного анализа (являющихся частью САПР), в рамках которых создаются и развиваются методы и алгоритмы, необходимые для учета алеаторной неопределенности. В частности, с алеаторной неопределенностью параметров при проектировании ТО связана реализованная во многих инструментальных программных средствах возможность анализа чувствительности моделей и статистического многовариантного моделирования. Применение данных средств является неотъемлемой частью инженерного анализа, т.к. позволяет получить дополнительную информацию о разрабатываемом ТО, оценить возможные риски и робастность принятых решений.

В настоящее время существуют инструментальные программные средства для решения оптимизационных задач параметрического синтеза проектных решений в условиях алеаторной неопределенности, когда информацию о параметрах ТО получают на основе статистических данных. Например, программное обеспечение optiSLang от компании Dynardo [5], программный комплекс pSeven [1]. Программный комплекс pSeven имеет множество успешных приложений и внедрен в известных зарубежных и отечественных компаниях, в частности, Airbus (в том числе Space Defense, Helicopters), Toyota Motors, Porsche, Daewoo Shipbuilding, Mitsubishi Motors и т.д. По утверждению разработчиков pSeven и компании Airbus, внедрение pSeven и технологии MACROS позволило сократить время и стоимость проектирования летательных аппаратов примерно на 10% [6].

Существует множество теорий для моделирования эпистемической неопределенности. Наиболее известны байесовская теория субъективных вероятностей [8], интервальная математика [7], теория нечетких множеств [16], теория возможностей [2]. Предложены различные расширения нечетких множеств, такие как: нечеткие множества второго типа (когда нечеткие множества являются значениями функции принадлежности), интервальные нечеткие множества (interval-valued fuzzy sets) [11], нечеткие параметризованные мягкие множества (fuzzy parameterized soft sets) [10] и др. Для учета надежности предоставляемой информации о недетерминированной переменной Л. Заде ввел концепцию *Z*-числа как упорядоченную пару нечетких чисел: первый компонент – значение переменной, второй компонент – степень уверенности эксперта в первом компоненте. Многие теории, моделирующие эпистемическую неопределенность об алеаторной неопределенности (суждения экспертов о случайном параметре) – неопределенность второго порядка – объединены научным направлением «неточные вероятности» (imprecise probability).

В интервальной математике, где параметры с эпистемической неопределенностью представляются интервалами, при распространении неопределенности от параметров к функции с увеличением числа операций значительно увеличивается интервал неопределенности функции. В нечетком и возможностном программировании существуют эффективные методы при линейных целевых функциях и ограничениях. Для нелинейных функций в нечетком и возможностном программировании и в теории *Z*-чисел автору статьи не известны эффективные методы. Для неточных вероятностей описано несколько подходов, но они требуют значительных вычислительных затрат.

Существуют математические программные средства общего назначения, позволяющие работать с нечеткими числами и параметрами, заданными интервалами (Matlab, R). Однако решение проблемы разработки инструментальных программных средств для автоматизации предварительного проектирования ТО в условиях параметрической эпистемической неопределенности требует дополнительных исследований.

В результате проведенных исследований для моделирования параметров с эпистемической неопределенностью была выбрана теория неопределенности Б. Лю [9], в которой обеспечивается эффективный инструмент (в достаточно широком классе функций) для решения оптимизационных задач с входными параметрами с эпистемической неопределенностью. В дальнейшем величину с эпистемической неопределенностью будем называть неопределенной величиной. В теории неопределенности получены аналитические выражения для числовых характеристик целевых функций и ограничений от неопределенных входных параметров. Эти числовые характеристики используются в качестве критериев оптимизации, что существенно сокращает время вычислений.

Теория неопределенности не обеспечивает в полной мере решение оптимизационных задач параметрического синтеза при проектировании ТО в условиях неопределенности параметров. В теории неопределенности рассмотрены оптимизационные модели для случая, когда только входные параметры являются неопределенными. Необходима разработка оптимизационных моделей и алгоритмов, в которых учитываются:

- наличие неопределённых оптимизируемых параметров ТО;
- требования лица, принимающего решения, (ЛПР) к надежности и робастности проектных решений.

3. Основные положения теории неопределенности

В этом разделе статьи приводятся основные положения теории неопределенности [9], которые используются для создания теоретической основы параметрического синтеза проектных решений в условиях эпистемической неопределенности.

Определение 1. Функция распределения неопределенности неопределенного параметра ξ есть функция Φ: $R \to [0, 1]$, определяемая как

$$\Phi(x) = \mathrm{M}\{\xi \le x\},$$

где M{•} – мера неопределенности события •, определяемая в [9] как степень уверенности эксперта в том, что это событие произойдет.

Теорема 1 [9]. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ − *неопределенные переменные,* f − *вещественная измеримая функция. Тогда* $f(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ *является неопределенной переменной.*

Теорема 2 [9]. *Пусть функция* $f(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ *– непрерывная строго возрастающая по* $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m$ *и строго убывающая по* $\xi_{m+1}, \xi_{m+2}, \ldots, \xi_n$. *Тогда если* $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ *– независимые неопределенные переменные с регулярными функциями распределения неопределенности* $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ *соответственно, то*:

а) $\xi = f(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ *является неопределенной переменной с обратным распределением неопределенности*:

$$\Psi^{-1}(\xi) = f(\Phi_1^{-1}(\alpha), \Phi_2^{-1}(\alpha), ..., \Phi_m^{-1}(\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(1-\alpha), ..., \Phi_n^{-1}(1-\alpha)),$$

б) $$E[\xi] = \int_0^1 f(\Phi_1^{-1}(\alpha), \Phi_2^{-1}(\alpha), ..., \Phi_m^{-1}(\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(1-\alpha), ...$$
$$..., \Phi_n^{-1}(1-\alpha))d\alpha,$$

в) $$V[\xi] = \int_0^1 (f(\Phi_1^{-1}(\alpha), \Phi_2^{-1}(\alpha), ..., \Phi_m^{-1}(\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(1-\alpha), ...$$
$$..., \Phi_n^{-1}(1-\alpha)) - E[\xi])^2 d\alpha,$$

г) *для любого* $\alpha \in [0, 1]$

$\mathrm{M}\{f(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \le 0\} \ge \alpha$

эквивалентно

$$f(\Phi_1^{-1}(\alpha), \Phi_2^{-1}(\alpha), \ldots, \Phi_m^{-1}(\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(1-\alpha), ..., \Phi_n^{-1}(1-\alpha)) \le 0.$$

Определение 2. Квантили неопределенной величины ξ (критические значения) есть

$$\sup_\alpha[\xi] = \sup\{r \mid \mathrm{M}\{\xi \ge r\} \ge \alpha\},$$

$$\inf_\alpha[\xi] = \inf\{r \mid \mathrm{M}\{\xi \le r\} \ge \alpha\},$$

где $\alpha \in [0, 1]$.

4. Оптимизационные модели параметрического синтеза проектных решений

Для автоматизации процессов параметрического синтеза проектных решений на предварительных этапах проектирования разработаны оптимизационные модели с входными и оптимизируемыми неопределенными параметрами, представленными функциями распределения неопределенности (определение 1).

Необходимость учета неопределенности оптимизируемых параметров вызвана тем, что на момент решения оптимизационной задачи, являющейся отражением локальной задачи синтеза параметров ТО, может быть неизвестно, какое конкретное значение оптимизируемого неопределенного параметра будет реализовано (выбрано). Например, это может быть связано:

- с необходимостью учета допусков на производстве, статистика по которым отсутствует;
- с итерационным характером реального процесса проектирования ТО (в других локальных задачах проектирования ТО оптимизируемый параметр может подвергаться корректировке).

Предлагается оптимизируемый неопределенный параметр x' моделировать суммой $x' = x + \delta$ двух величин: детерминированной переменной x и заданной экспертом посредством функции распределения неопределенности неопределенной величины δ, представляющей неточность этой переменной.

Оптимизационные модели при наличии неопределенных входных и оптимизируемых параметров с эпистемической неопределенностью имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \min\limits_{\bar{\mathrm{x}}'}(\max)[f_1(\bar{\mathrm{x}}', \bar{\xi}), \ldots, f_m(\bar{\mathrm{x}}', \bar{\xi})], \\ g_j(\bar{\mathrm{x}}', \bar{\xi}) \le 0,\ j = 1, 2, \ldots, p; \end{cases}$$

где $\overline{\mathrm{x}}'$ – вектор оптимизируемых детерминированных и/или неопределенных параметров ТО; $\bar{\xi}$ – вектор входных неопределенных параметров; $f_i(\overline{\mathrm{x}}', \bar{\xi})$ – целевая функция; $g_j(\overline{\mathrm{x}}', \bar{\xi})$ – функция ограничения; *m, p* – соответственно количество целевых функций и ограничений.

Целевые функции, зависящие от неопределенных величин, также являются неопределенными величинами, которые не могут использоваться для оптимизации, поэтому оптимизируются их числовые характеристики (ожидаемое значение, дисперсия, квантиль и др.). Так как ограничения, включающие функции, зависящие от неопределенных величин, не определяют четкие области допустимых решений, то задаются уровни степеней уверенности выполнения этих ограничений. Степени уверенности выполнения этих ограничений будем называть числовыми характеристиками ограничений. В результате замены целевых функций и ограничений их числовыми характеристиками формируется общая оптимизационная модель 1:

$$\begin{cases} \min\limits_{\overline{\mathrm{x}}'}(\max)[d_1[f_1(\overline{\mathrm{x}}', \bar{\xi})], ..., d_m[f_m(\overline{\mathrm{x}}', \bar{\xi})]], \\ \mathrm{M}[g_j(\overline{\mathrm{x}}', \bar{\xi}) \le 0] \ge \alpha_{g_j},\ j = 1, 2, ..., p; \end{cases}$$

где d_i − множество числовых характеристик функции f_i от неопределенных параметров; М(•) − мера неопределенности (степени уверенности) события (•), α_{g_j} – заданный ЛПР уровень меры неопределенности (степени уверенности) для выполнения *j*-го ограничения, $0 \le \alpha_{g_j} \le 1$.

Разработаны варианты общей оптимизационной модели 1 с неопределенными параметрами, обеспечивающие возможность решения различных типов задач параметрического синтеза проектных решений.

Если требуется выбрать параметры ТО, обеспечивающие оптимальность средних значений целевых функций, то оптимизационная модель включает в качестве числовых характеристик ожидаемые значения функций от неопределенных параметров – модель 2:

$$\min_{\bar{x}'}(\max)[E[f_1(\bar{x}', \bar{\xi})], ..., E[f_m(\bar{x}', \bar{\xi})]].$$

Надежность проектных решений учитывается в моделях 3-6.

Если требуется получить минимальные квантили целевых функций – значения целевых функций, которые не будут превышены с заданной надежностью – степенью уверенности $\alpha_{f_1},...,\alpha_{f_m}$, то применяется модель 3:

$$\min_{\bar{x}'}[\inf_{\alpha_{f_1}}[f_1(\bar{x}', \bar{\xi})], ..., \inf_{\alpha_{f_m}}[f_m(\bar{x}', \bar{\xi})]].$$

Если требуется получить максимальную надежность – степень уверенности, что значения целевых функций не будут превышать заданные значения $r_{f_1}, ..., r_{f_m}$, то применяется модель 4:

$$\max_{\bar{x}'}[\alpha_{f_1}, ..., \alpha_{f_m}]$$

при $\mathrm{M}\{f_1(\bar{x}', \bar{\xi}) \le r_{f_1}\} \ge \alpha_{f_1}, ..., \mathrm{M}\{f_m(\bar{x}', \bar{\xi}) \le r_{f_m}\} \ge \alpha_{f_m}$.

При максимизации целевых функций используются модели 5 и 6, аналогичные моделям 3 и 4.

Модель 5:

$$\max_{\bar{x}'}[\sup_{\alpha_{f_1}}[f_1(\bar{x}', \bar{\xi})], ..., \sup_{\alpha_{f_m}}[f_m(\bar{x}', \bar{\xi})]].$$

Модель 6:

$$\max_{\bar{x}'}[\alpha_{f_1}, ..., \alpha_{f_m}]$$

при $\mathrm{M}\{f_1(\bar{x}', \bar{\xi}) \ge r_{f_1}\} \ge \alpha_{f_1}, ..., \mathrm{M}\{f_m(\bar{x}', \bar{\xi}) \ge r_{f_m}\} \ge \alpha_{f_m}$.

Чтобы обеспечить робастность целевых функций, т.е. низкую чувствительность целевых функций к вариативности неопределенных входных и оптимизируемых параметров, используются модели 7 и 8.

Если необходимо найти решения, обеспечивающие низкую дисперсию целевых функций, то применяется модель 7:

$$\min_{\bar{x}'}(\max)[E[f_1(\bar{x}', \bar{\xi})], ..., E[f_m(\bar{x}', \bar{\xi})]],$$

$$\min_{\bar{x}'}[V[f_1(\bar{x}', \bar{\xi})], ..., V[f_m(\bar{x}', \bar{\xi})]].$$

Для обеспечения робастности целевых функций в модели 8 предлагается использовать в качестве критериев оптимизации разницу между критическими значениями целевых функций, т.е. диапазон, в котором лежат значения целевых функций с заданной степенью уверенности:

$$\min_{\bar{x}'}(\max)[E[f_1(\bar{x}',\bar{\xi})],...,E[f_m(\bar{x}',\bar{\xi})]],$$

$$\min_{\bar{x}'}[\inf_{\alpha_{f_1}}[f_1(\bar{x}',\bar{\xi})]-\sup_{\alpha_{f_1}}[f_1(\bar{x}',\bar{\xi})],...$$

$$...,\inf_{\alpha_{f_m}}[f_m(\bar{x}',\bar{\xi})]-\sup_{\alpha_{f_m}}[f_m(\bar{x}',\bar{\xi})]],$$

$$\alpha_{f_1}\geq 0,5,...,\alpha_{f_m}\geq 0,5.$$

При построении оптимизационных моделей могут применяться различные сочетания и агрегации $E[f_i(\bar{x}',\bar{\xi})]$, $\inf_{\alpha_{f_i}}[f_i(\bar{x}',\bar{\xi})]$, $\sup_{\alpha_{f_i}}[f_i(\bar{x}',\bar{\xi})]$, $V[f_i(\bar{x}',\bar{\xi})]$, $\inf_{\alpha_{f_i}}[f_i(\bar{x}',\bar{\xi})]-\sup_{\alpha_{f_i}}[f_i(\bar{x}',\bar{\xi})]$, в зависимости от технических требований к проектируемому ТО и предпочтений ЛПР.

Применение многокритериальных моделей позволяет получить многомерный Парето-фронт, который используется для выбора проектных решений с использованием аксиоматических методов или интерактивных человеко-машинных процедур [4].

5. Аналитические выражения числовых характеристик целевых функций и ограничений

С использованием предложенного в разделе 4 способа моделирования оптимизируемых неопределенных параметров и выражений из теории неопределенности [9] выведены аналитические выражения числовых характеристик целевых функций, применяемых в моделях 2–8.

Пусть $\bar{x}'=(x_1',...,x_k')$ – вектор независимых неопределенных оптимизируемых параметров $(x_1'=x_1+\delta_1,...,x_k'=x_k+\delta_k)$, $x_1, \ldots, x_k$ – детерминированные расчетные переменные (варьируемые при выполнении оптимизационных расчетов), $\delta_1, \ldots, \delta_k$ – независимые неопределенные величины с обратными функциями распределения $\Phi_{\delta_1}^{-1},...,\Phi_{\delta_k}^{-1}$ и $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – независимые неопределенные входные параметры с обратными функциями распределения $\Phi_{\xi_1}^{-1}, ..., \Phi_{\xi_n}^{-1}$.

Если $f_i(\overline{\mathrm{x}}', \overline{\xi})$ − непрерывная строго возрастающая по $x_1', ..., x_l'$, $\xi_1, \ldots, \xi_q$ и строго убывающая по $x_{l+1}', ..., x_k'$, $\xi_{q+1}, \ldots, \xi_n$, тогда в результате использования теоремы 2 (пункт б) ожидаемое значение целевой функции будет иметь вид

$$E[f_i(\overline{\mathrm{x}}', \overline{\xi})] = \int_0^1 f_i(x_1 + \Phi_{\delta_1}^{-1}(\alpha), ..., x_l + \Phi_{\delta_l}^{-1}(\alpha), x_{l+1} + \Phi_{\delta_{l+1}}^{-1}(1-\alpha), ...$$
$$..., x_k + \Phi_{\delta_k}^{-1}(1-\alpha), \Phi_{\xi_1}^{-1}(\alpha), \Phi_{\xi_2}^{-1}(\alpha), ..., \Phi_{\xi_q}^{-1}(\alpha), \Phi_{\xi_{q+1}}^{-1}(1-\alpha), ...$$
$$..., \Phi_{\xi_n}^{-1}(1-\alpha))d\alpha$$

В результате использования теоремы 2 (пункт в) дисперсия может быть найдена следующим образом.

$$V[f_i(\overline{\mathrm{x}}', \overline{\xi})] = \int_0^1 (f_i(x_1 + \Phi_{\delta_1}^{-1}(\alpha), ..., x_l + \Phi_{\delta_l}^{-1}(\alpha), x_{l+1} +$$
$$+ \Phi_{\delta_{l+1}}^{-1}(1-\alpha), ..., x_k + \Phi_{\delta_k}^{-1}(1-\alpha), \Phi_{\xi_1}^{-1}(\alpha), \Phi_{\xi_2}^{-1}(\alpha), ...$$
$$..., \Phi_{\xi_q}^{-1}(\alpha), \Phi_{\xi_{q+1}}^{-1}(1-\alpha), ..., \Phi_{\xi_n}^{-1}(1-\alpha)) - E[f_i(\overline{\mathrm{x}}', \overline{\xi})])^2 d\alpha$$

В результате использования определения 2 и теоремы 2 (пункт г) критические значения $\inf_{\alpha_{f_i}}[f_i(\overline{\mathrm{x}}', \overline{\xi})]$ и $\sup_{\alpha_{f_i}}[f_i(\overline{\mathrm{x}}', \overline{\xi})]$ могут быть найдены по формулам

$$\inf_{\alpha_{f_i}}[f_i(\overline{\mathrm{x}}', \overline{\xi})] = f_i(x_1 + \Phi_{\delta_1}^{-1}(\alpha_{f_i}), ..., x_l + \Phi_{\delta_l}^{-1}(\alpha_{f_i}), x_{l+1} +$$
$$+ \Phi_{\delta_{l+1}}^{-1}(1-\alpha_{f_i}), ..., x_k + \Phi_{\delta_k}^{-1}(1-\alpha_{f_i}), \Phi_{\xi_1}^{-1}(\alpha_{f_i}), \Phi_{\xi_2}^{-1}(\alpha_{f_i}), ...$$
$$..., \Phi_{\xi_q}^{-1}(\alpha_{f_i}), \Phi_{\xi_{q+1}}^{-1}(1-\alpha_{f_i}), ..., \Phi_{\xi_n}^{-1}(1-\alpha_{f_i})),$$

$$\sup_{\alpha_{f_i}}[f_i(\overline{\mathrm{x}}', \overline{\xi})] = f_i(x_1 + \Phi_{\delta_1}^{-1}(1-\alpha_{f_i}), ..., x_l + \Phi_{\delta_l}^{-1}(1-\alpha_{f_i}), x_{l+1} +$$
$$+ \Phi_{\delta_{l+1}}^{-1}(\alpha_{f_i}), ..., x_k + \Phi_{\delta_k}^{-1}(\alpha_{f_i}), \Phi_{\xi_1}^{-1}(1-\alpha_{f_i}), \Phi_{\xi_2}^{-1}(1-\alpha_{f_i}), ...$$
$$..., \Phi_{\xi_q}^{-1}(1-\alpha_{f_i}), \Phi_{\xi_{q+1}}^{-1}(\alpha_{f_i}), ..., \Phi_{\xi_n}^{-1}(\alpha_{f_i})),$$

где α_{f_i} – заданное ЛПР значение меры неопределенности – степени уверенности, $0 \le \alpha_{f_i} \le 1$.

Ограничения, включенные в оптимизационную модель, могут выполняться с заданным значением меры неопределенности. При переходе к задаче математического программирования учет ограничений производится в следующем виде:

$$\mathrm{M}\{g_j(\bar{\mathrm{x}}', \bar{\xi}) \le 0\} \ge \alpha_{g_j}, \; j = 1, 2, ..., p,$$

где M(•) − мера неопределенности события (•), α_{g_j} – заданный ЛПР уровень меры неопределенности (степени уверенности) для выполнения j-го ограничения, $0 \le \alpha_{g_j} \le 1$.

Если $g_j(\bar{\mathrm{x}}', \bar{\xi})$ – непрерывная строго возрастающая по $x'_1, ..., x'_l$, $\xi_1, \dots, \xi_q$ и строго убывающая по $x'_{l+1}, ..., x'_k$, $\xi_{q+1}, \dots, \xi_n$, то ограничения $\mathrm{M}\{g_j(\bar{\mathrm{x}}', \bar{\xi}) \le 0\} \ge \alpha_{g_j}$ с учетом теоремы 2 (пункт г) эквивалентны:

$$g_j(x_1 + \Phi^{-1}_{\delta_1}(\alpha_{g_j}), ..., x_l + \Phi^{-1}_{\delta_l}(\alpha_{g_j}), x_{l+1} + \Phi^{-1}_{\delta_{l+1}}(1 - \alpha_{g_j}), ...$$
$$..., x_k + \Phi^{-1}_{\delta_k}(1 - \alpha_{g_j}), \Phi^{-1}_{\xi_1}(\alpha_{g_j}), \Phi^{-1}_{\xi_2}(\alpha_{g_j}), ...$$
$$..., \Phi^{-1}_{\xi_q}(\alpha_{g_j}), \Phi^{-1}_{\xi_{q+1}}(1 - \alpha_{g_j}), ..., \Phi^{-1}_{\xi_n}(1 - \alpha_{g_j})) \le 0$$

Используя α_{g_j} в качестве изменяемого параметра, ЛПР получает гибкий инструмент для формирования требований к параметрам ТО, посредством регулирования «мягкости» выполнения ограничений.

Полученные аналитические выражения числовых характеристик целевых функций и ограничений используются для выполнения расчетов по предложенным в разделе 4 оптимизационным моделям 2–8.

6. Применение оптимизационных моделей параметрического синтеза проектных решений в задачах предварительного проектирования летательных аппаратов

Предложенные в разделе 4 оптимизационные модели позволили решить задачи синтеза параметров силовой установки и весовых параметров при предварительном проектировании летательных аппаратов в условиях эпистемической неопределенности [12–15].

Рассмотрим двухкритериальную оптимизационную модель для синтеза параметров силовой установки, удовлетворяющих требованиям по дальности сверхзвукового крейсерского полета и приоритетным дозвуковым тактико-техническим требованиям. Эта модель подробно рассматривается в работе [15].

Модель 9.

$$\max_{\bar{x}'}[(K/c_e)_{\max}, k_w],$$

где

$$(K/c_e)_{\max} = \frac{l\sqrt{\pi q k_{osw}(P_{opt} - k_w C_{f\,eqv} S_{\text{ом}} q)}}{P_{opt}(c_{e_{\text{макс}}} + c_e^{-P}(\bar{P}_{opt} - \bar{P}_{\text{макс}}))},$$

$$k_w = \frac{P_{0\Phi}\bar{P}_{opt}}{2S_{\text{ом}}C_{f\,eqv}q}\left(\frac{\bar{P}_{opt}}{2\bar{P}_{opt} - \bar{P}_{\text{макс}} + c_{e_{\text{макс}}}/c_e^{-P}} + 1\right),$$

где $\bar{P}_{opt} = \bar{P}_{\text{макс}} + (\bar{P}_{\text{форс}} - \bar{P}_{\text{макс}})STC_{opt}$, $P_{opt} = \bar{P}_{opt}P_{0\Phi}$, $(K/c_e)_{\max}$ – K/c_e при STC_{opt}, обеспечивающем максимум дальности сверхзвукового крейсерского полета; $\bar{P}_{\text{форс}}$– относительная тяга двигателя на режиме «полный форсаж», STC_{opt} – сверхзвуковой коэффициент дросселирования, соответствующий $\bar{P}_{opt}$; где q – скоростной напор при заданной высоте и скорости; l – размах крыла; $S_{\text{ом}}$ – площадь омываемой поверхности; k_{osw} – коэффициент Освальда; $C_{f\,eqv}$ – коэффициент эквивалентного трения; k_w – показатель уровня волнового сопротивления; $P_{0\Phi}$ – проспектная тяга двигателя на режиме «полный форсаж» (при высоте H = 0, числе Маха $M = 0$); $c_{e_{\text{макс}}}$ – коэффициент удельного расхода топлива на режиме работы двигателя «максимал»; c_e^{-P} – наклон удельной сверхзвуковой дроссельной характеристики, $\overline{P}_{\text{макс}}$ – относительная тяга двигателя на режиме «максимал», $\overline{\mathrm{x}}' = (\overline{P}_{\text{форс}}, \overline{P}_{\text{макс}}, c_{e_{\text{макс}}}, c_e^{-P})$ – вектор оптимизируемых параметров.

Пусть $\overline{\xi} = (C_{f\ eqv}, k_{osw})$ − вектор входных неопределенных параметров. Предлагаются модели 10–12, созданные на основе моделей, представленных в разделе 4.

Модель 10 (следует из модели 2):

$$\max_{\overline{\mathrm{x}}'}[E[(K / c_e)_{\max}], E[k_w]].$$

Модель 11 (следует из модели 5):

$$\max_{\overline{\mathrm{x}}'}[\sup_{\alpha_{(K/c_e)_{\max}}}[(K / c_e)_{\max}], \sup_{\alpha_{k_w}}[k_w]].$$

Модель 12 (следует из модели 7):

$$\max_{\overline{\mathrm{x}}'}[E[(K / c_e)_{\max}], E[k_w]], \min_{\overline{\mathrm{x}}'}[V[(K / c_e)_{\max}], V[k_w]]$$

В этих моделях используются критерии оптимизации, в которых усредняются целевые функции по неопределенным параметрам, учитываются надежность и робастность проектных решений.

Неопределенные параметры заданы линейными функциями распределения:

$$\Phi_{(\bullet)}(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x \le a_{(\bullet)}, \\ (x - a_{(\bullet)}) / (b_{(\bullet)} - a_{(\bullet)}), \text{если } a_{(\bullet)} \le x \le b_{(\bullet)}, \\ 1, \text{если } x \ge b_{(\bullet)}, \end{cases}$$

где $[a_{(\bullet)}, b_{(\bullet)}]$ – указанный экспертом диапазон изменения неопределенного параметра (•).

На рис. 1 представлен Парето-фронт, полученный в результате расчетов по оптимизационным моделям 9 и 10 с использованием многокритериального генетического алгоритма, реализованного в Matlab.

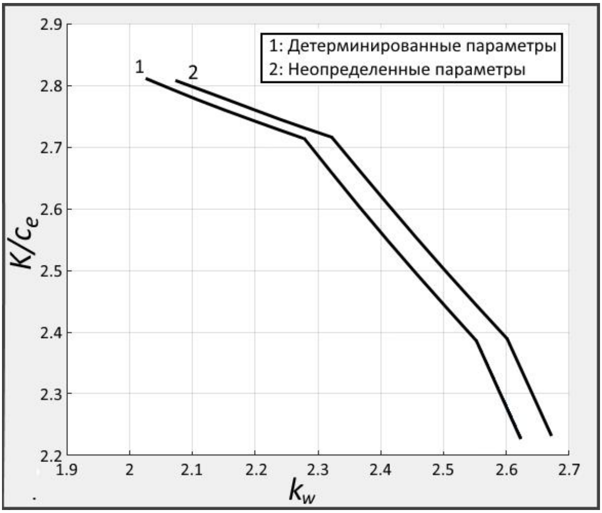

Рис. 1. Парето-фронты для моделей 9 и 10

Нижний Парето-фронт соответствует расчету с точными номинальными значениями параметров по модели 9. Парето-фронт, полученный по модели 10 с неопределенными параметрами смещается в область «лучших» значений целевых функций.

На рис. 2 представлен Парето-фронт, полученный в результате расчетов по оптимизационным моделям 9 и 11 (значения уровней меры неопределенности $\alpha_{(K/c_e)_{\max}}$ и α_{k_w} равны 0,7).

На рис. 2 видно, что применение оптимизационной модели, в которой учитываются требования к надежности проектных решений, приводит к смещению Парето-фронта в область «худших» значений целевых функций.

В модели 12 для возможности графической иллюстрации результатов расчетов уменьшим число критериев и используем модель 13:

$$\max_{\overline{\mathrm{x}}'}[E[(K/c_e)_{\max}], E[k_w]], \min_{\overline{\mathrm{x}}'}[V[(K/c_e)_{\max}]].$$

На рис. 3 представлен Парето-фронт, полученный в результате расчетов по оптимизационной модели 13. На графике вместо дисперсии $V[(K/c_e)_{\max}]$ используется среднеквадратическое отклонение $\sigma[(K/c_e)_{\max}]$ для наглядности представления полученных результатов.

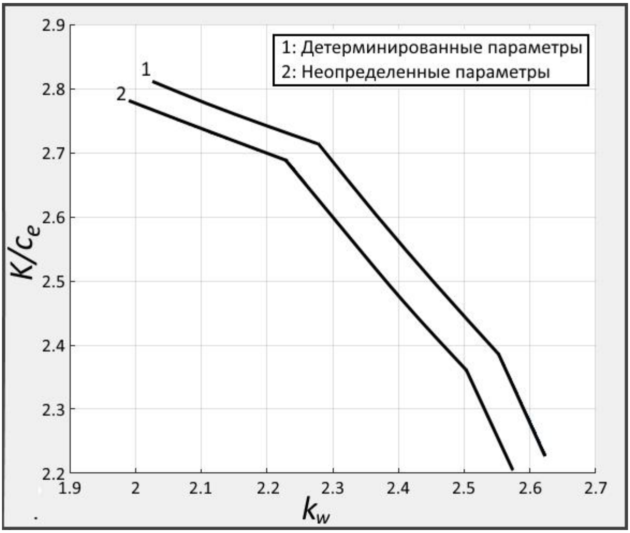

Рис. 2. Парето-фронты для моделей 9 и 11

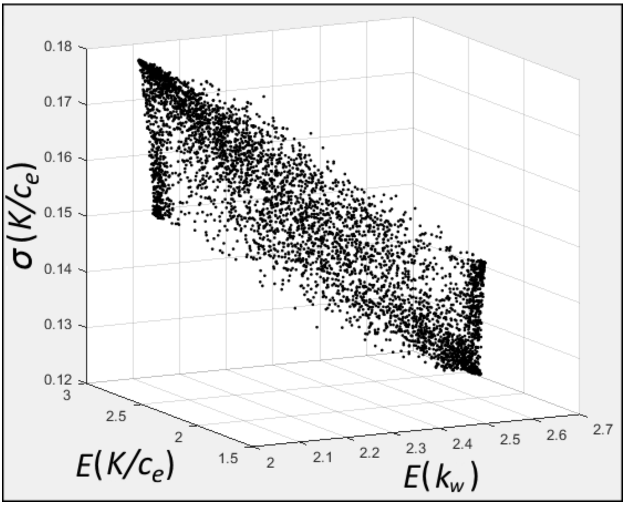

Рис. 3. Парето-фронт для модели 13

На рис. 3 видно, что увеличение требований к робастности приводит к «ухудшению» ожидаемых значений целевых функций.

Таким образом, в результате применения разработанных многокритериальных оптимизационных моделей формируются Парето-фронты, которые позволяют ЛПР найти компромисс между значениями критериев оптимизации и выбрать параметры разрабатываемого летательного аппарата.

Для сравнения задачи параметрического синтеза при предварительном проектировании летательных аппаратов [12–15] решались с использованием моделей, в которых все недетерминированные параметры рассматривались как случайные. Модели с неопределенными параметрами обычно дают более консервативные решения по сравнению с моделями со случайными параметрами. Время расчета по моделям с неопределенными параметрами на порядок меньше, чем по моделям со случайными параметрами.

7. Заключение

С использованием теории неопределенности разработаны оптимизационные модели с неопределенными входными и оптимизируемыми параметрами, позволяющие при параметрическом синтезе на предварительном этапе проектирования ТО обеспечить надежность и робастность проектных решений. Эти модели являются основой создания инструментальных программных систем для решения задач синтеза параметров конкретных видов ТО в условиях параметрической эпистемической неопределенности [3]. Эффективность и обоснованность результатов теоретических исследований подтверждена их применением в задачах синтеза заданного набора параметров летательных аппаратов в условиях параметрической неопределенности на этапе предварительного проектирования.

Литература

1. БУРНАЕВ Е. и др. *Многодисциплинарная оптимизация, анализ данных и автоматизация инженерных расчетов с помощью программного комплекса pSeven* // CAD/CAM/CAE Observer. – 2014. – №4(88). – С. 56–61.
2. ВАГЕНКНЕХТ М., ЯЗЕНИН А.В. *Возможностная оптимизация*. – Тверь: ТвГУ, 2012. – 140 р.
3. ВЕРЕСНИКОВ Г.С., ПАНКОВА Л.А., ПРОНИНА В.А. *Разработка инструментальной программной среды для решения задач параметрического синтеза при проектировании технических объектов в условиях неопределенности параметров* // Автоматизация в промышленности. – 2019. – №12. – С. 34–39.
4. НОГИН В.Д. *Сужение множества Парето: аксиоматический подход*. – М.: Физматлит, 2015. – 236 с.
5. СТАРОВЕРОВ Н. *Обзор Dynardo optiSLang*. – 2014. – URL: www.ansysadvantage.ru/fileadmin/archive/20/ANSYS-DVANTAGE-Rus-20-03.pdf.
6. *About DATADVANCE*. – URL: https://www.datadvance.net/company/about-us/.
7. ALEFELDA G., MAYER G. *Interval analysis: theory and applications* // J. of Computational and Applied Mathematics. – 2000. – Vol. 121. – P. 421–464.
8. HÁJEK A. *Interpretations of Probability* // The Stanford Encyclopedia of Philosophy. – 2002–2019. – URL: https://plato.stanford.edu/entries/probability-interpret/.
9. LIU B. *Theory and Practice of Uncertain Programming.* – Berlin: Springer-Verlag, 2009. – 201 p.
10. MAJI P.K., BISWAS R., ROY A.R. *Soft set theory* // Computers & Mathematics with Applications. – 2003. – Vol. 45. – P. 555–562.
11. QIN H., MA X. *A Complete Model for Evaluation System Based on Interval-Valued Fuzzy Soft Set* // IEEE Access. – 2018. – Vol. 6. – P. 35012–35028.

12. VERESNIKOV G.S., PANKOVA L.A., PRONINA V.A. *Optimal robust design under conditions of uncertainty* // Proc. of the 11th International Conference "Management of Large-Scale System Development" (MLSD). – 2018. – Moscow: IEEE. – URL: https://ieeexplore.ieee.org/document/8551913.
13. VERESNIKOV G.S., PANKOVA L.A., PRONINA V.A. *Preliminary design with the epistemic uncertainty of parameters* // Advances in Systems Science and Applications. – 2018. – Vol. 18, No. 3. – P. 154–164.
14. VERESNIKOV G.S., PRONINA V.A., PANKOVA L.A. *Uncertain programming in preliminary design of technical systems with uncertain parameters* // Proc. of the 12th Int. Symposium "Intelligent Systems" (INTELS'2016, Moscow, Russia). – 2017. – Atlanta: Elsevier. – Vol. 103. – P. 36–43.
15. VERESNIKOV G.S., PRONINA V.A., PANKOVA L.A., OGORODNICOV O.V., IKRYANOV I.I. *Determining maneuverable aircraft parameters in preliminary design under conditions of uncertainty* // Procedia Computer Science. – 2017. – Vol. 112. – P. 1123–1130.
16. ZIMMERMAN H-J. *Fuzzy Set Theory and Applications.* – Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001. – 525 p.

OPTIMIZATION MODELS FOR PARAMETRIC SYNTHESIS OF DESIGN SOLUTIONS UNDER UNCERTAIN PARAMETERS

Georgy Veresnikov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (veresnikov@mail.ru).

Abstract: Epistemic uncertainty may typically occur at preliminary stages of the technical objects design due to necessity to establish design solutions using the expertise data. To model the epistemic uncertainty occurring upon receipt of information on the parameters of the technical object under design from the experts, B.Liu's uncertainty approach was chosen, as it offered analytical forms to calculate the functions number characteristics depending on parameters with epistemic uncertainty, that provides high computation efficiency when making optimization calculations. The article offers optimization models developed within the frameworks of uncertainty approach to solve the tasks of design solutions parametric synthesis in preliminary design of the technical objects. These models include optimization *criteria ensuring safety and robustness of the design solutions. To apply the optimization models developed, the analytical forms of number characteristics of the target functions and limitations depending on uncertain inputs and parameters under optimization. Use of such analytical forms provides a solution of uncertainty of parameters under optimization due to the need to take into account the tolerances in production without statistic data and due to iteration nature of complex technical objects design processes, where the parameters under optimization may be adjusted.*

Keywords: epistemic uncertainty, optimization model, uncertainty theory, robustness, reliability.

УДК 621.45.01
ББК 30.2
DOI: 10.25728/ubs.2020.85.10

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии М.В. Губко.

Поступила в редакцию 26.02.2020.
Опубликована 31.05.2020.