АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ ГОРЯЧЕГО РЕЗЕРВИРОВАНИЯ[1]

Уанкпо Г. Ж. К.[2а], Козырев Д. В.[3а,б], Нибасумба Э.[4а], Муаль М. Н. Б.[4а]

([а] *Российский университет дружбы народов, Москва*)

([б] *Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Резервирование является одним из основных способов повышения надежности сложных технических систем и широко применяется не только в наземных системах передачи данных, но и в телекоммуникационных беспроводных сетях на базе высотных привязных мультироторных платформ. В работе рассматривается математическая модель восстанавливаемой резервированной системы передачи данных в виде модели замкнутой однородной системы горячего резервирования каналов передачи данных с одним ремонтным устройством и произвольным числом источников данных. Предполагается, что функция распределения времени безотказной работы компонент системы является экспоненциальной, а функция распределения времени их ремонта – произвольной. Изучается надежность системы, определяемая как стационарная вероятность безотказной работы системы. Предлагаемая аналитическая методология позволила оценить надежность всей системы в случае отказов её компонент. Получены явные аналитические и асимптотические выражения для стационарных вероятностей состояний системы и стационарной вероятности безотказной работы системы, позволяющие анализировать другие операционные характеристики системы относительно производительности резервных компонент. Разработана имитационная модель для анализа надежности системы в тех случаях, когда не удается получить выражения для стационарных вероятностей состояний системы в явном аналитическом виде и для построения эмпирической функции распределения времени безотказной работы и функции надежности системы. Для численного анализа и сравнения результатов были выбраны следующие распределения времени ремонта компонент: экспоненциальное, Вейбулла – Гнеденко, Парето, логнормальное и гамма-распределение. Также изучается проблема анали-

---

[1] *Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100» и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №19-29-06043 и №20-37-90137.*

[2] *Гектор Жибсон Кинманон Уанкпо, аспирант* (*gibsonhouankpo@yahoo.fr*).

[3] *Дмитрий Владимирович Козырев, к.ф.-м.н., доцент* (*kozyrev-dv@rudn.ru*).

[3] *Эммануэль Нибасумба, аспирант* (*ema.patiri2015@yandex.ru*).

[4] *Мутуама Нда Бьенвеню Муаль, аспирант* (*bmouale@mail.ru*).

за чувствительности характеристик надежности рассматриваемой системы к видам функций распределения времени ремонта компонент системы.

Ключевые слова: стохастическое моделирование, надежность резервированных систем, асимптотический анализ, имитационное моделирование, стационарные вероятности состояний системы, эмпирическая функция надежности.

1. Введение

Ранее в [7] была рассмотрена модель надёжности однородной системы передачи данных облегчённого резервирования с экспоненциальной функцией распределения (ФР) времени безотказной работы (в.б.р.) и произвольной функцией распределения времени ремонта её компонент. Были получены явные аналитические выражения для стационарного распределения вероятностей состояний системы и для стационарной вероятности отказа системы. Проведён сравнительный анализ надежности систем холодного и горячего резервирования через модель облегчённого резервирования. Также в [4] была рассмотрена аналитическая модель однородной системы передачи данных горячего резервирования. В [1–2] были построены имитационная модель для исследования надежности замкнутой однородной системы холодного резервирования с произвольным числом источников данных и ограниченными ресурсами для их обработки и имитационная модель расчета стационарных вероятностей и оценки надежности резервированной системы с произвольными распределениями времени безотказной работы и ремонта её элементов. В [3, 8] было показано, что не всегда можно получить явные аналитические выражения для стационарного распределения рассматриваемой системы передачи данных с холодным резервом. Имитационная модель позволила исследовать надежность системы, определяемую как стационарную вероятность безотказной работы системы, а также получить оценки характеристик надежности системы; также численное исследование и анализ графиков показали, что зависимость характеристик надежности системы от исходных распределений становится исчезающе малой при «быстром» восстановлении её компонент, т.е. с ростом относительной скорости восстановления.

Значительная работа была проделана в этой области, например в [6]: была проанализирована надежность системы с учетом отказа по общей причине и оценено улучшение системы по сравнению с существующей системой горячего резервирования, которая изменяется во всей системе. Для анализа надежности используется модель Маркова, и надежность сравнивается с коэффициентом отказов подсистемы. В работе [11] надежность системы горячего резервирования анализируется с помощью моделей независимых систем и зависимых систем с общими сбоями. Надежность резервной системы может быть эффективно проанализирована с помощью марковских моделей, которые могут моделировать избыточную конфигурацию и переход между состояниями. В [19] был рассмотрен анализ надежности многоуровневой системы горячего резервирования. В [13] был представлен обзор основных подходов теории надежности и описан систематический метод анализа надежности резервированных систем с использованием матричных методов. Рассмотрены некоторые общие конфигурации системы, которые включают: горячий резерв, холодный резерв, восстанавливаемые и невосстанавливаемые системы; системы с зависимыми состояниями. Также в [15] был представлен анализ надежности двухкомпонентной системы программируемых логических контроллеров с горячим резервированием, и для этой цели использовались реальные данные промышленной системы. В программируемых логических контроллерах наблюдаются четыре типа отказов: сбой входного модуля, сбой цифрового реле / сбой электропитания, сбой полного сбоя блока и сбой из-за поврежденного программного обеспечения. Понятие проверки введено, чтобы обнаружить тип отказа. Измерения эффективности системы по показателям надежности получены с использованием полумарковских процессов и методов регенерации. В [5], используя концепции теории считающих процессов, предложен простой, точный и эффективный в вычислительном отношении метод определения надежности резервированных систем. Предложенный метод позволяет эффективно анализировать системы с неидентичными компонентами, смешанными компонентами холодного и горячего резерва, общими резервными компонентами между различными подсистемами, работающими в разных условиях, отказами переключения и произвольными распределениями времени отказов. Предложенный метод был продемонстрирован на нескольких примерах, а также предоставлен используемый программный код в MATLAB. В [17] был проведен анализ надежности двухблочной системы горячего резервирования с ремонтируемыми и неремонтируемыми отказами. Предполагалось, что система имеет 3 режима работы, 2 ремонтируемых режима отказа и несколько неремонтируемых режимов отказа. Даны определения новых показателей надежности, а методы их расчета получены с использованием вероятностного анализа, определенного интеграла и метода дополнительных переменных.

Однако во всех рассмотренных выше исследовательских работах авторы не анализировали модель замкнутой однородной горячего резерва с одним устройством восстановления, произвольным числом источников данных, с экспоненциальной функцией распределения времени безотказной работы и произвольной функцией распределения времени восстановления его элементов, используя математический и имитационный подходы.

2. Математическая модель анализа надежности системы

2.1. ОПИСАНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Рассматривается замкнутая однородная система горячего резервирования с экспоненциальной функцией распределения времени безотказной работы и произвольной функцией распределения времени ремонта её компонент, которая, согласно дополненным обозначениям Кендалла [9], будет обозначаться как $<M_n/GI/1>$. Система состоит из n неоднородных каналов передачи данных с одним ремонтным устройством. В данной работе будет рассмотрена зависимость вероятности безотказной работы системы $<M_n/GI/1>$ от относительной скорости восстановления.

Для исследования системы вводятся следующие предположения:

Предположение 1: первоначально резервные компоненты участвуют в функционировании системы наравне с основным;

Предположение 2: отказавшие компоненты поступают в ремонт по одному.

Мы можем рассмотреть следующие состояния исследуемой системы:

Состояние 0: все компоненты работают;

Состояние 1: один элемент отказал и находится в ремонте, $(n-1)$ элементов работают;

Состояние i: i элементов отказали, один находится в ремонте, $(i-1)$ – ждут своей очереди на ремонт, $(n-i)$ – работают, $i=\overline{2,n-1}$.

Состояние n: все элементы отказали, один находится в ремонте, остальные $(n-1)$ ждут своей очереди на ремонт.

Ставится задача нахождения явных аналитических выражений для стационарного распределения вероятностей состояний системы и для стационарной вероятности безотказной работы системы как в общем случае, так и для некоторых частных случаев распределений. Для этого рассмотрим случайный процесс $\nu(t)$ – число отказавших компонент системы в момент времени t, определенный на множестве состояний $\varepsilon=\{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Для марковизации этого процесса, т.е. для описания поведения системы с помощью Марковского процесса (МП) [12], введём дополнительную переменную $x(t) \in R_{+}^{2}$ – время, затраченное в момент t на ремонт отказавшего элемента, и воспользуемся расширенным пространством состояний $E=\varepsilon \times R^{2}_{+}$. В результате получим двумерный [18] процесс $(\nu(t), x(t))$ с расширенным фазовым пространством $E = \{(0), (1, x), (2, x), \ldots, (n, x)\}$.

Предположим, что компоненты системы функционируют независимо друг от друга, и введем следующие обозначения:

A – случайная величина (с.в.), время до отказа основного элемента;

B – с.в., время восстановления отказавшего элемента;

$A(x)$ – функция распределения (ФР) с.в. A;

$B(x)$ – ФР с.в. B;

$b(x)$ –плотность распределения (ПР) с.в. B;

$\tilde{b}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} b(x)dx -$ преобразование Лапласа (ПЛ) плотности $b(x)$;

EA – среднее время безотказной работы основного элемента;

EB – среднее время ремонта отказавшего элемента;

$\rho=EA/EB$ – относительная скорость восстановления;

$\beta(x) = \frac{b(x)}{1-B(x)}$ – условная ПР остаточной длительности ремонта элемента, находящегося в ремонте время t (интенсивность восстановления [10]);

α – параметр экспоненциального распределения времени безотказной работы элемента;

$\lambda_i = (n-i)\cdot\alpha; i = \overline{0, n-1};\ \alpha > 0$ – интенсивность перехода между отказами.

Обозначим через $p_0(t)$ – вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии $i = 0$, и через $p_i(t, x)$ – ПР (по непрерывной компоненте) вероятностей того, что в момент времени t система находится в состоянии $(i = \overline{1, n})$ и время, затраченное на ремонт отказавшего элемента, находится в интервале $(x, x + dx)$;

$$p_0(t)dx = p\{v(t) = 0\},$$

$$p_i(t, x)dx = p\{v(t) = i,\ x < x(t) < x + dx\},\ i = \overline{1, n}.$$

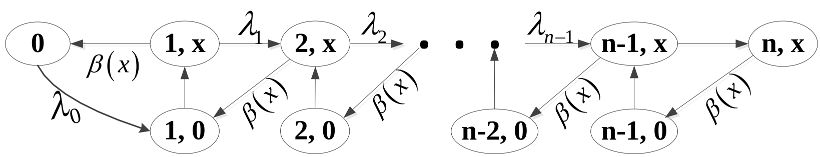

Рис. 1. График интенсивностей переходов

Теорема 1. Стационарное распределение вероятностей состояний восстанавливаемой системы <$M_n/GI/1$> имеет вид:

$$p_0 = C_1 \frac{\tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_0}; \quad p_1 = C_1 \frac{1-\tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_1};$$

$$p_i = C_1 \left(A_i \frac{1-\tilde{b}(\lambda_i)}{\lambda_i} + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} \cdot \left(\prod_{k=j}^{i-1} \frac{\lambda_k}{(\lambda_j - \lambda_{k+1})} \right) \cdot A_j \frac{1-\tilde{b}(\lambda_j)}{\lambda_j} \right),$$

$i = \overline{2, n-1}; \quad n > 2;$

$$p_n = \begin{cases} C_1 \left(A_n E[\mathrm{B}] - A_{n-1} \frac{1-\tilde{b}(\lambda_{n-1})}{\lambda_{n-1}} \right), \quad n = 2; \\ C_1 \left(\begin{array}{l} A_n E[\mathrm{B}] - A_{n-1} \frac{1-\tilde{b}(\lambda_{n-1})}{\lambda_{n-1}} + \\ + \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-j} \cdot \left(\prod_{k=j}^{n-2} \frac{\lambda_{k+1}}{(\lambda_j - \lambda_{k+1})} \right) \cdot A_j \frac{1-\tilde{b}(\lambda_j)}{\lambda_j} \end{array} \right), \quad n > 2. \end{cases}$$

Доказательство. С помощью формулы полной вероятности и с предельным переходом при $\Delta \to 0$ перейдем к выводу системы дифференциальных уравнений Колмогорова, позволяющей найти стационарные вероятности [16] состояний рассматриваемой системы.

Предположим, что для описанного процесса существует стационарное распределение вероятностей при $t \to \infty$. Тогда получим систему уравнения баланса. Перейдем к решению полученной системы, используя метод вариации постоянной [14].

В итоге получаем следующие аналитические выражения для стационарных вероятностей состояний восстанавливаемой системы $\langle M_n/GI/1 \rangle$ в следующем виде:

$$p_0 = C_1 \frac{\tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_0}; \quad p_1 = C_1 \frac{1-\tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_1};$$

$$p_i = C_1 \left(\begin{array}{l} A_i \frac{1-\tilde{b}(\lambda_i)}{\lambda_i} + \\ + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} \cdot \left(\prod_{k=j}^{i-1} \frac{\lambda_k}{(\lambda_j - \lambda_{k+1})} \right) \cdot A_j \frac{1-\tilde{b}(\lambda_j)}{\lambda_j} \end{array} \right), i = \overline{2, n-1}; n > 2;$$

$$p_n = \begin{cases} C_1\left(A_n E[\mathrm{B}] - A_{n-1}\dfrac{1-\tilde{b}(\lambda_{n-1})}{\lambda_{n-1}}\right), \quad n=2; \\ C_1\left(\begin{array}{l} A_n E[\mathrm{B}] - A_{n-1}\dfrac{1-\tilde{b}(\lambda_{n-1})}{\lambda_{n-1}} + \\ +\sum\limits_{j=1}^{n-2}(-1)^{n-j}\cdot\left(\prod\limits_{k=j}^{n-2}\dfrac{\lambda_{k+1}}{(\lambda_j-\lambda_{k+1})}\right)\cdot A_j\dfrac{1-\tilde{b}(\lambda_j)}{\lambda_j}\end{array}\right), \quad n>2; \end{cases}$$

где $E[B]$ – математическое ожидание с.в. времени ремонта отказавшего элемента и

$$A_1 = 1; \quad A_n = A_{n-1};\ n=2;$$

$$A_2 = \left(1-\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\tilde{b}(\lambda_1)\right)\cdot\frac{1}{\tilde{b}(\lambda_2)}, \quad n\ge 3;$$

$$A_{i+1} = \left(\begin{array}{l} A_i + \sum\limits_{j=1}^{i-1}(-1)^{i-j}\cdot\left(\prod\limits_{k=j}^{i-1}\dfrac{\lambda_k}{(\lambda_j-\lambda_{k+1})}\right)\cdot A_j - \\ -\sum\limits_{j=1}^{i}(-1)^{i+1-j}\cdot\left(\prod\limits_{k=j}^{i}\dfrac{\lambda_k}{(\lambda_j-\lambda_{k+1})}\right)\cdot A_j\tilde{b}(\lambda_j)\end{array}\right)\cdot\frac{1}{\tilde{b}(\lambda_{i+1})},$$

$$i=\overline{2,n-2};\ n\ge 4;$$

$$A_n = A_{n-1}\left(1+\tilde{b}(\lambda_{n-1})\right)+\sum_{j=1}^{n-2}(-1)^{n-1-j}\cdot\left(\prod_{i=j}^{n-2}\frac{\lambda_i}{(\lambda_j-\lambda_{i+1})}\right)A_j -$$

$$-\sum_{j=1}^{n-2}(-1)^{n-j}\cdot\left(\prod_{i=j}^{n-2}\frac{\lambda_{i+1}}{(\lambda_j-\lambda_{i+1})}\right)\cdot A_j\tilde{b}(\lambda_j), \quad n\ge 4.$$

2.2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ ПРИ РЕДКИХ ОТКАЗАХ

Пусть $\tilde{b}(\lambda_i) = \int_0^\infty e^{-\lambda_i x} b(x)dx$ – ПЛ ПР с.в. времени восстановления отказавшего элемента.

Рассмотрим случай, когда $\max(\lambda_i) \to 0$.

Используя метод разложения в ряд Тейлора, получим следующее выражение:

$$\tilde{b}(\lambda_i)=\sum_{k=0}^{np}\frac{\tilde{b}^{(k)}(0)}{k!}\lambda_i^{\,k}+\overset{=}{o}(\lambda_i^{\,np})=$$

$$=\sum_{k=0}^{np}\frac{\left[\int\limits_0^\infty e^{-\lambda_i x}\cdot b(x)dx\right]^{(k)}_{|\lambda_i=0}}{k!}\lambda_i^{\,k}=\sum_{k=0}^{np}\left(-1\right)^k\cdot E\left[B^k\right]\cdot\frac{\lambda_i^{\,k}}{k!},$$

где $E[B^k]=\int_0^\infty x^k b(x)dx$ – моменты k-го порядка времени восстановления отказавшего элемента, np – номер порядка.

В итоге получаем аналитические асимптотические выражения при редких отказах для вероятностей состояний восстанавливаемой системы <$M_n/GI/1$> в следующем виде:

$$p_0=C_1\frac{\sum\limits_{k=0}^{np}\left(-1\right)^k\cdot E\left[B^k\right]\cdot\frac{\lambda_1^{\,k}}{k!}}{\lambda_0};\quad p_1=C_1\frac{1-\sum\limits_{k=0}^{np}\left(-1\right)^k\cdot E\left[B^k\right]\cdot\frac{\lambda_1^{\,k}}{k!}}{\lambda_1};$$

$$p_i=C_1\left(\begin{array}{l}A_i\dfrac{1-\sum\limits_{k=0}^{np}\left(-1\right)^k\cdot E\left[B^k\right]\cdot\frac{\lambda_i^{\,k}}{k!}}{\lambda_i}+\\[2ex]+\sum\limits_{j=1}^{i-1}\left(-1\right)^{i-j}\cdot\left(\prod\limits_{k=j}^{i-1}\dfrac{\lambda_k}{(\lambda_j-\lambda_{k+1})}\right)\cdot A_j\dfrac{1-\sum\limits_{k=0}^{np}\left(-1\right)^k\cdot E\left[B^k\right]\cdot\frac{\lambda_j^{\,k}}{k!}}{\lambda_j}\end{array}\right),$$

$i=\overline{2,n-1};\ n\geq 3;$

$$p_n=C_1\left(A_n b-A_{n-1}\frac{1-\sum\limits_{k=0}^{np}\left(-1\right)^k\cdot E\left[B^k\right]\cdot\frac{\lambda_{n-1}^{\,k}}{k!}}{\lambda_{n-1}}\right),\ n=2.$$

Иначе

$$p_n=C_1\left(\begin{array}{l}A_n b-A_{n-1}\dfrac{1-\sum\limits_{k=0}^{np}\left(-1\right)^k\cdot E\left[B^k\right]\cdot\frac{\lambda_{n-1}^{\,k}}{k!}}{\lambda_{n-1}}+\\[2ex]+\sum\limits_{j=1}^{n-2}\left(-1\right)^{n-j}\cdot\left(\prod\limits_{k=j}^{n-2}\dfrac{\lambda_{k+1}}{(\lambda_j-\lambda_{k+1})}\right)\cdot A_j\dfrac{1-\sum\limits_{k=0}^{np}\left(-1\right)^k\cdot E\left[B^k\right]\cdot\frac{\lambda_j^{\,k}}{k!}}{\lambda_j}\end{array}\right).$$

Как видно из приведенных выражений, имеется зависимость стационарных вероятностей состояний системы от вида распределений времени ремонта. Однако эта зависимость становится исчезающе малой при «быстром» ремонте отказавших элементов, т.е. с ростом относительной скорости восстановления ρ [2, 7].

3. Численные и графические результаты по явным аналитическим формулам

Рассмотрим частные случаи модели при $\rho = 100$; $n = \{2; 3; 5\}$; где $\rho = \frac{a_1}{b_1}$ и $b_1 = 1$, с разными известными распределениями времени ремонта.

В таблице 1 приведены полученные значения вероятности $1 - P_n$ безотказной работы восстанавливаемой системы.

Для анализа и сравнения результатов были выбраны следующие распределения времени ремонта: экспоненциальное (M), Вейбулла – Гнеденко ($WB = 0{,}4$), Парето ($PAR = 7$), гамма- ($G = 3$) и логнормальное ($LN = 1$).

Таблица 1. Точные значения (*Т.з.*) *и приближенные значения* (*П.з.*) *вероятности безотказной работы восстанавливаемой системы* $1 - p_n$ *при* $n\rho = 2$

n		*M*	*GW*(*W*)	*PAR*(*P*)	*G*(*G*)	*LN*(*Sig*)
2	Т.з.	0,9998	0,9990	0,9998	0,9998	0,9997
	П.з.	0,9998	0,9989	0,9998	0,9998	0,9997
3	Т.з.	0,9999	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999
	П.з.	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
5	Т.з.	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
	П.з.	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Видно, что для всех рассматриваемых распределений чем больше число элементов системы, тем, естественно, больше вероятность безотказной работы системы. А также с увеличением числа порядка разложения в ряд Тейлора видно, что результаты асимптотического выражения совпадают (полностью согласуются) с результатами, полученными по точным формулам.

На рис. 2 представлены графики зависимости вероятности безотказной работы системы от относительной скорости восстановления $\rho = 25$.

Графические результаты демонстрируют вывод о высокой асимптотической нечувствительности стационарной надежности системы – хорошо видно, что различия между кривыми при «быстром» восстановлении становятся исчезающе малыми для всех рассматриваемых распределений времени ремонта компонент системы [2, 7].

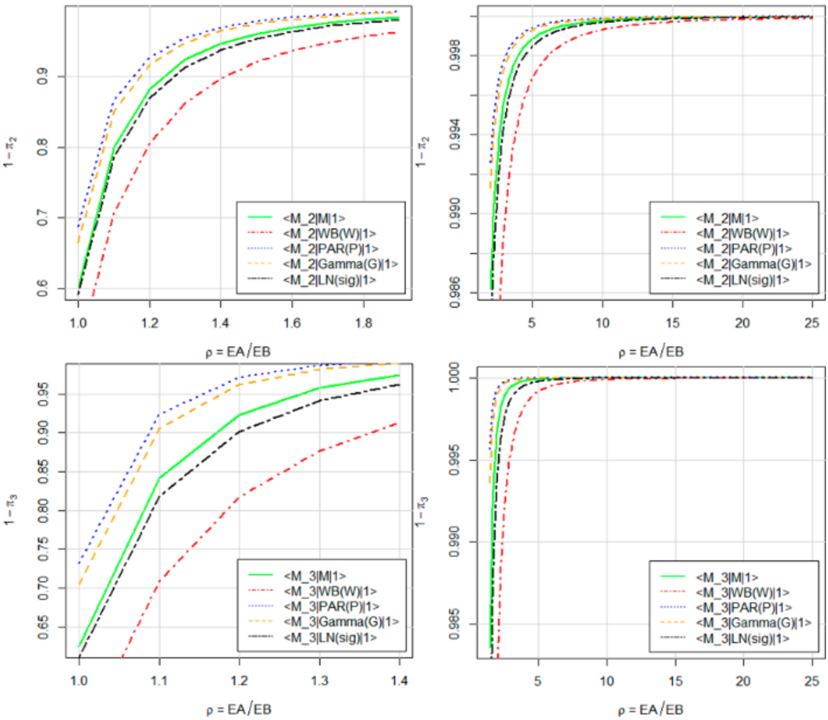

Рис. 2. Графики зависимости вероятности безотказной работы системы $1 - p_n$ *от* ρ *при* $n = \{2; 3\}$

4. Имитационная модель анализа надежности системы

4.1. ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА СТАЦИОНАРНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ

Поскольку не всегда удается получить явные аналитические выражения для стационарного распределения рассматриваемой системы, особенно в случае, когда функция распределения времени безотказной работы системы не является экспоненциальным распределением, то был применен дискретно-событийный имитационный подход.

Для описания алгоритма имитационного моделирования надёжности системы введём следующие переменные [7]:

double t – часы модельного времени, меняются при отказе или восстановлении компонент системы;

int i, j – переменные состояния системы; при наступлении события осуществляется переход из i в j;

double t_{nextfail} – служебная переменная, в которой хранится время до следующего отказа элемента;

double $t_{\text{nextrepair}}$ – служебная переменная, в которой хранится время до следующего окончания ремонта отказавшего элемента;

int k – счетчик числа итераций основного цикла.

Для наглядности имитационная модель представлена на рис. 3 в виде блок-схемы.

Алгоритм 1.

Исходные данные:

A – с.в., время до отказа основного элемента;

B – с.в., время восстановления отказавшего элемента;

i – число отказавших элементов;

n – число элементов в системе;

$\xi = \{\xi_1 < \cdots < \xi_n\}$ – время отказа элемента;

$X = \{X_1 < \cdots < X_n\}$ – момент отказа элемента в системе;

η – время ремонта отказавшего элемента;

Y – момент окончания ремонта элемента в системе;

$t_{\text{Тек}}$ – текущее время;

T – максимальное модельное время.

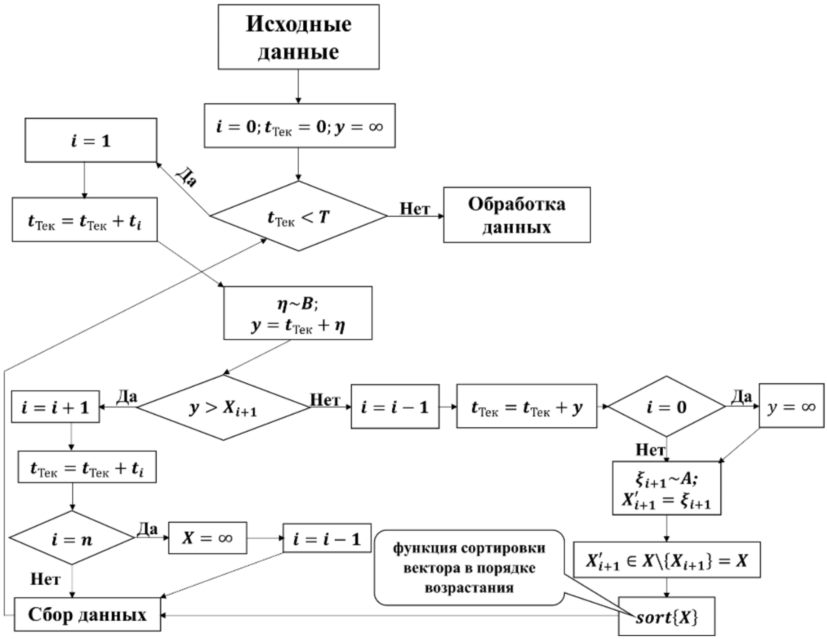

Рис. 3. Блок-схема имитационной модели для оценки стационарных вероятностей состояний системы

Ввод: “GI”, a1, b1, n, T, NG.

“GI” – функция распределения;

a1 – среднее время между отказами элементов;

b1 – среднее время ремонта;

n – число элементов в системе;

T – максимальное модельное время прогона;

NG – число графиков траекторий.

Вывод: стационарные вероятности состояний p_0, p_1, …, p_n.

4.2. ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОЦЕНКИ НАДЁЖНОСТИ СИСТЕМЫ

В этом случае при отказе *n-го* элемента система перестаёт функционировать (процесс попадает в поглощающее состояние).

Алгоритм 2.
Исходные данные:
В этом разделе, максимальное модельное время $T = \infty$.
Ввод: “GI”, a1, b1, n, NG.
Вывод: Оценка надёжности системы $\widehat{ET}$ **.**

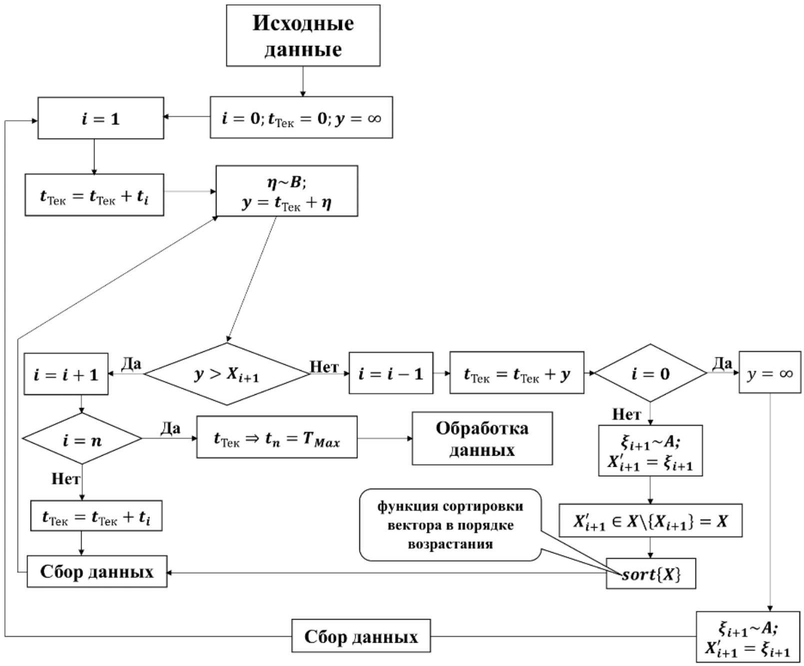

Рис. 4. Блок-схема имитационной модели для оценки надёжности системы

5. Сравнительный анализ численных и графических результатов

Рассмотрим модели при $n = 2$; $T = 100000$; $NG = 1000$; где $\rho = \frac{a_1}{b_1} = 25$ и $b_1 = 1$.

В таблице 2 приведены значения стационарных вероятностей состояний восстанавливаемой системы p_i, вычисленные как методом имитационного моделирования (Им), так и по аналитическим формулам (Ан).

Таблица 2. Стационарные вероятности состояний p_i восстанавливаемой системы

		π_0	π_1	π_2
M	Им.	0,9802	0,0196	0,0002
	Ан.	0,9802	0,0196	0,0002
$GW(W)$	Им.	0,9807	0,0191	0,0002
	Ан.	0,9802	0,0192	0,0006
$PAR(P)$	Им.	0,9801	0,0197	0,0002
	Ан.	0,9802	0,0197	0,0001
$G(G)$	Им.	0,9802	0,0196	0,0002
	Ан.	0,9802	0,0197	0,0001
$LN(Sig)$	Им.	0,9804	0,0194	0,0002
	Ан.	0,9802	0,0195	0,0003

Как видно, результаты, полученные имитационным способом, хорошо аппроксимируют результаты, полученные по явным аналитическим формулам [3].

На рис. 5 представлены графики зависимости вероятности безотказной работы системы и графики абсолютной разности между значениями стационарной надёжности системы при показательном и непоказательных распределениях времени безотказной работы компонент системы.

Как можно видеть, абсолютная разность вероятности безотказной работы системы между экспоненциальным с логнормальным слишком мала. Система с Парето-распределением времени безотказной работы и с экспоненциальным распределением времени ремонта её компонент показала самую высокую стационарную надёжность системы.

На рис. 6 представлены графики эмпирической функции распределения $F^*(t)$ и эмпирической функции надёжности $R^*(t)$ при $\rho = 5$; $n = 2$.

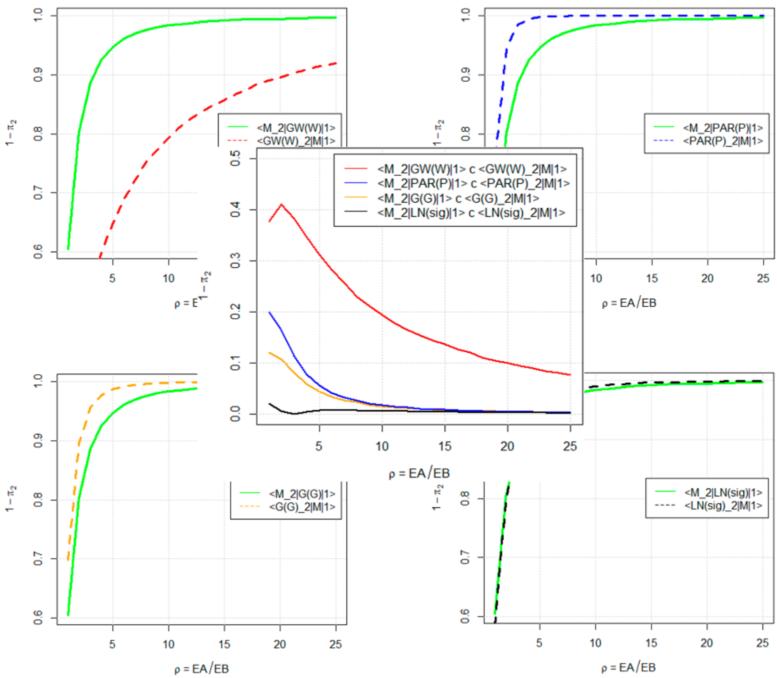

Рис. 5. Графики зависимости вероятности безотказной работы системы $1 - p_2$ *от* ρ *и графики абсолютной разности с ростом* ρ

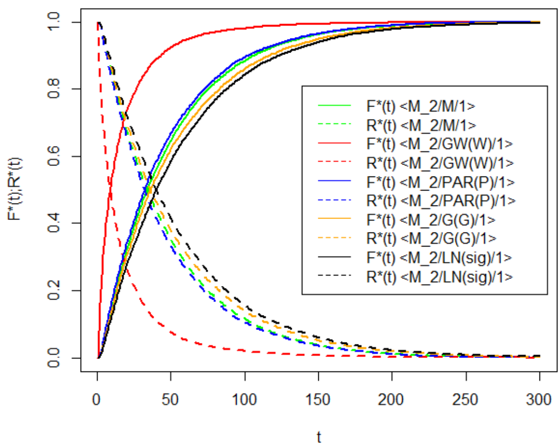

Рис. 6. Графики эмпирической функции распределения $F^*(t)$ *и эмпирической функции надёжности* $R^*(t)$

6. Заключение

В работе были получены явные аналитические выражения для стационарного распределения вероятностей состояний системы и для стационарной вероятности безотказной работы системы в общем случае, а также асимптотическое выражение для вероятностей состояния системы при редких отказах. Полученные формулы показывают наличие явной зависимости этих характеристик от вида ФР времени ремонта её компонент.

Численный анализ показал, что с увеличением числа порядка разложения в ряд Тейлора видно, что результаты асимптотического выражения хорошо согласуются с результатами, полученными по точным формулам. Графические результаты демонстрируют высокую асимптотическую нечувствительность стационарной надежности системы, что хорошо видно из анализа различий между кривыми при «быстром» восстановлении. В качестве метрики близости кривых была выбрана равномерная разность, которая становится исчезающе малой для всех рассматриваемых распределений времени ремонта элементов системы с ростом относительной скорости восстановления.

Было проведено имитационное моделирование системы. Численный анализ показал, что построенная имитационная модель хорошо аппроксимирует аналитическую модель системы, а значит может быть использована в тех случаях, когда не удается получить выражения для стационарных вероятностей состояний системы в явном аналитическом виде. Также были построены графики эмпирической функции распределения в.б.р. системы и эмпирической функции надежности системы.

Литература

1. УАНКПО Г.Ж.К., КОЗЫРЕВ Д.В. *Программный комплекс имитационного моделирования и расчета стационарных вероятностей и оценки надежности резервированной системы с произвольными распределениями времени безотказной работы и ремонта её элементов* // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2019. – Т. 15, №3. – С. 542–550. – DOI: 10.25559/SITITO.15.201903.542-550.

2. УАНКПО Г.Ж.К., КОЗЫРЕВ Д.В. *Аналитическое и имитационное моделирование надежности замкнутой однородной системы с произвольным числом источников данных и ограниченными ресурсами для их обработки* // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2018. – Т. 14, №3. – С. 548–555.
3. УАНКПО Г.Ж.К., КОЗЫРЕВ Д.В. *Анализ чувствительности характеристик надёжности модели дублированной системы передачи данных к виду распределений времени безотказной работы и ремонта её элементов* // В сб.: Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (Distributed computer and communication networks: control, computation, communications, DCCN-2016): материалы Девятнадцатой международной научной конференции, 21–25 ноября 2016 г. – С. 473–480.
4. УАНКПО Г.Ж.К., КОЗЫРЕВ Д.В., ГУДКОВА И.А. *Модель надёжности однородной системы передачи данных горячего резервирования с произвольным распределением времени ремонта элементов* // Обозрение прикладкой и промышленной математики (ОПиПМ). – 2019. – Т. 26, №4.– С. 384–386. – URL: www.elibrary.ru/item.asp/id=42583668.
5. AMARI S.V.; DILL G. *A new method for reliability analysis of standby systems* // Proc. of the Annual Reliability and Maintainability Symposium. – Article number: 4914713. – P. 417–422. – DOI: 10.1109/RAMS.2009.4914713.
6. CHAE E., PARK C.-W., KANG J.-W. *Reliability Analysis of Hot-Standby Sparing Sub-system with Common Cause Failures for Railway* // Journal of the Korean Society for Railway. – December, 2018. – Vol. 21, No. 11. – P. 1072–1079. – DOI: 10.7782/JKSR.2018.21.11.1072.
7. HOUANKPO H.G.K., KOZYREV D.V. *Reliability Model of a Homogeneous Warm-Standby Data Transmission System with General Repair Time Distribution* // Springer Nature Switzerland AG, 2019 / Eds.: V.M. Vishnevskiy, K.E. Samouylov, D.V. Kozyrev: DCCN 2019, LNCS 11965. – P. 443–454. – DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-36614-8_34.

8. HOUANKPO H.G.K., KOZYREV D.V. *Sensitivity Analysis of Steady State Reliability Characteristics of a Repairable Cold Standby Data Transmission System to the Shapes of Lifetime and Repair Time Distributions of its Elements* // Selected Papers of the VII Conference “Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems”, Moscow, Russia, 24-Apr-2017, CEUR Workshop Modellings 1995 (2017). – P. 107–113. – URL: http://ceur-ws.org/Vol-1995/paper-15-970.pdf.
9. KENDALL D.G. *Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of embedded Markov chains* // In: Ann. Math. Stat. – 1953. – Vol. 24. – P. 338–354.
10. LISNIANSKI A., LAREDO D., HAIM H.B. *Multi-state Markov model for reliability analysis of a combined cycle gas turbine power plant* // In: Second International Symposium on Stochastic Models in Reliability Engineering, Life Science and Operations Management – 2016 (SMRLO-2016). – DOI: https://doi.org/10.1109/SMRLO.2016.31.
11. PARK C.-W., CHAE E., SHIN D.-H. *Reliability Analysis of Hot-Standby Sparing System with Common Cause Failures for Railway* // Journal of the Korean Society for Railway. – June, 2017. – Vol. 20, No. 3. – P. 349–355. – DOI: 10.7782/JKSR.2017.20.3.349.
12. PARSHUTINA S., BOGATYREV V. *Models to support design of highly reliable distributed computer systems with redundant processes of data transmission and handling* // In: International Conference “Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies – 2017” (IT&QM&IS-2017). – DOI: https://doi. org/10.1109/ITMQIS.2017.8085772.
13. PATTAVINA J. *Reliability Analysis for Redundant Systems* // EDN Magazine, in: Edn-Boston then Denver then Highlands Ranch Co. – April 2011. – URL: https://www.researchgate.net/publication/340610343.
14. PETROVSKY I.G. *Lectures on the theory of ordinary differential equations* // Lectures on the theory of ordinary differential equations. – Moscow, GITTL, 1952. – 232 p. (In Russian).

15. RIZWAN S.M., KHURANA V., TANEJA G. *Reliability analysis of a hot standby industrial system* // International Journal of Modelling and Simulation. – September, 2010. – Vol. 30(3). – P. 315–322. – DOI: 10.2316/Journal.205.2010.3.205-5057.
16. SEVASTYANOV B.A. *An Ergodic theorem for Markov processes and its application to telephone systems with refusals* // Theor. Probab. Appl. – 1957. – Vol. 2(1). – P. 104–112.
17. SU B. *Reliability analysis of a new 2-unit hot standby redundant system* // 38th International Conference on Computers and Industrial Engineering-2008. – 2008. – Vol. 2. – P. 1741–1747.
18. THE J., LAI C.-M., CHENG Y.-H. *Impact of the real-time thermal loading on the bulk electric system reliability* // IEEE Trans. Reliab. – 2017. – Vol. 66(4), 11101119. – DOI: https://doi.org/10.1109/TR.2017.2740158.
19. WU J., LUO S. *Reliability analysis of layered structure hot standby redundancy system* // ISSN: 1673-0291. – December, 2011. – Vol. 35, Iss. 6. – P. 44–48.

RELIABILITY ANALYSIS OF A HOMOGENEOUS HOT STANDBY DATA TRANSMISSION SYSTEM

Hector Gibson Kinmanhon Houankpo, Postgraduate Student, Department of Applied Probability and Informatics, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow (gibsonhouankpo@yahoo.fr).

Dmitry Kozyrev, PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow; Senior research scientist, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia (kozyrev-dv@rudn.ru).

Emmanuel Nibasumba, Postgraduate Student, Department of Applied Probability and Informatics, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow (ema.patiri2015@yandex.ru).

Moutouama N'dah Bienvenu Mouale, Postgraduate Student, Department of Applied Probability and Informatics, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow (bmouale@mail.ru).

Abstract: In this work, we consider the mathematical model of a repairable data transmission system as a model of a closed homogeneous hot standby system with one repair device with an arbitrary number of data sources with an exponential *distribution function of uptime and an arbitrary distribution function of the repair time of its elements. We study the system-level reliability, defined as the steady-state probability of failure-free system operation. The proposed analytical methodology made it possible to evaluate the reliability of the entire system in case of failure of its elements. Explicit analytic and asymptotic expressions are obtained for the steady-state probabilities of system states and the steady-state probability of failure-free system operation, which allow us to analyze other operational characteristics of the system relative to the performance of the backup elements using the constant variation method. We developed a simulation model of the system for the cases when it is not possible to obtain expressions for the steady-state probabilities of system in an explicit analytical form and for constructing an empirical lifetime distribution function and the system reliability function. Exponential, Weibull – Gnedenko-, Pareto-, Gamma- and Lognormal distributions were selected for the numerical analysis and comparison of results.*

Keywords: stochastic modeling, reliability of redundant systems, asymptotic analysis, simulation modeling, stationary probabilities of system states, empirical reliability function.

УДК 021.8 + 025.1
ББК 78.34
DOI: 10.25728/ubs.2020.87.1

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.М. Вишневским.

Поступила в редакцию 31.08.2020.
Опубликована 30.09.2020.