ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛНЫХ ОДНОРОДНЫХ РЕСУРСНЫХ СЕТЕЙ С «ЖАДНЫМИ» ВЕРШИНАМИ[1]

Жилякова Л. Ю.[2], **Чаплинская Н. В.**[3]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Описана модификация графовой динамической модели «ресурсная сеть» – «ресурсная сеть с жадными вершинами». В этой модели вершины графа на каждом такте дискретного времени обмениваются ресурсом по ребрам, обладающим ограниченной пропускной способностью, причем сначала передают имеющийся ресурс себе в петлю, а оставшийся ресурс распределяют в смежные вершины по правилам «стандартной» ресурсной сети. Это два правила с пороговым переключением: если ресурс вершины превышает суммарную пропускную способность всех ее исходящих ребер, она отдает по полной пропускной способности в каждое ребро, в противном случае отдает весь ресурс, деля его пропорционально пропускным способностям исходящих ребер. Исследуется процесс функционирования полной однородной ресурсной сети с «жадными» вершинами при разной величине суммарного ресурса и различных начальных состояниях. Описаны возможные состояния сети; выявлено нехарактерное для стандартной модели состояние – остановка сети. Найдены два пороговых значения суммарного ресурса, разделяющих зоны различного поведения сети: первое разделяет зоны «недостаточного» и «достаточного» ресурса, второе – зоны «достаточного малого» и «достаточного большого» ресурса. В каждой зоне описано функционирование сети и исследованы предельные состояния и потоки. Для всех характерных ситуаций приведены примеры, демонстрирующие согласованность аналитических результатов с численными экспериментами.

Ключевые слова: ресурсная сеть, модель «жадных» вершин, графовая динамическая пороговая модель.

1. Введение

Ресурсная сеть – графовая динамическая потоковая модель, в которой в дискретном времени происходит перераспределение ресурса между вершинами. Впервые модель была предложена

[1] *Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, гранты № 20-07-00190А, 19-07-00525А.*

[2] *Людмила Юрьевна Жилякова, д.ф.-м.н., в.н.с.,* (*zhilyakova.ludmila@gmail.com*).

[3] *Надежда Васильевна Чаплинская, техник* (*nadya1462@gmail.com*).

в [11] и получила дальнейшее развитие в ряде работ, результаты которых аккумулированы в [9, 10]. Ресурсная сеть представляет собой ориентированный взвешенный граф. Веса ребер обозначают их пропускные способности. Вершины распределяют ресурс по двум правилам с пороговым переключением, которое происходит в зависимости от количества ресурса, находящегося в данный момент в вершине. Если это количество превосходит суммарный вес исходящих из вершины ребер, то в каждую смежную вершину передается ресурс, равный пропускной способности соответствующего ребра. Иначе вершина отдает весь свой ресурс смежным вершинам пропорционально пропускным способностям соединяющих с ней ребер. На каждом такте дискретного времени t вершины, имеющие ресурс, отдают его одновременно.

Для описанной модели получены результаты, позволяющие для каждой топологии сети и пропускных способностей ее ребер, для любого суммарного ресурса и его начального распределения по вершинам определить предельный поток и предельное состояние вершин сети. Также определена формула, позволяющая для произвольной сети вычислить пороговое значение ресурса T, при переходе через которое сеть изменяет свое поведение (см. [9]).

При суммарном ресурсе W, не превосходящем T, т.е. при *малом ресурсе*, все вершины сети функционируют по одному правилу и отдают весь ресурс на каждом такте. Динамика сети в этом случае описывается моделью рассеяния на графах [16, 21]. Модели рассеяния хорошо изучены – для графов с постоянной топологией они описываются однородными цепями Маркова. Аппарат однородных цепей Маркова применяется при моделировании процессов во многих предметных областях, в частности при решении задач о нахождении консенсуса в многоагентных системах [4, 5], социальных сетях [7] и многих других.

При суммарном ресурсе выше порогового значения, т.е. при *большом ресурсе*, процесс функционирования сети описывается неоднородной цепью Маркова. Некоторые вершины сети в этом случае накапливают излишки ресурса (такие вершины были названы аттракторами [9]). Вершины, имеющие большой ресурс, ведут себя как «стреляющие вершины» в пороговой модели «игра выстреливания фишек» (chip-firing game) [15, 19, 22]. Эта игра на графе стала широко известна благодаря тому, что нашла применение в описании схода лавин разной природы – она легла в основу математической модели «абелева куча песка» [20, 24], которая, в свою очередь, применяется в моделировании сложных природных и социальных процессов, названных «самоорганизованной критичностью» [13, 14, 17, 18, 23].

За время с момента появления модели «ресурсная сеть» в 2009 году, был создан и исследован ряд ее модификаций. В монографии [10] введена модель с ограничениями на ёмкость вершин-аттракторов. С помощью этого ограничения некоторые не-аттрактивные вершины сети получили возможность также накопить некоторые излишки ресурса. Для таких сетей было введено понятие «вторичной аттрактивности».

В работах [1, 2] были рассмотрены ресурсные сети на графах с нестандартной достижимостью [8]. В [1] введены и описаны ресурсные сети с вентильной достижимостью, в [2] – с магнитной достижимостью. В статье [3] предложены двухресурсные сети и, как и в самой первой работе по ресурсным сетям [11], рассмотрен частный случай: полные однородные сети. Динамические ресурсные сети (сети, веса дуг которых могут принимать более одного значения) предложены и описаны в [12].

Еще один научный коллектив исследовал применение ресурсных сетей с нестандартной достижимостью при построении моделей телекоммуникационных систем [6].

Настоящая статья посвящена новой модификации ресурсных сетей – ресурсной сети с «жадными» вершинами. Отличие этой модели заключается в том, что каждая вершина передает ресурс сначала в свою петлю (если она есть) и только затем остатки распределяет в другие вершины. Как и в других случаях, мы начинаем исследование с частного случая: полной однородной сети с петлями.

2. Ресурсные сети – основные понятия

Формальное описание ресурсной сети с «жадными» вершинами наследует все понятия обычной ресурсной сети. Дадим основные определения и опишем функционирование «стандартной» сети.

Ресурсной сетью называется связный ориентированный граф $G=(V,E)$ с вершинами $v_i \in V$ и ребрами $e_{ij}=(v_i,v_j)\in E$; $|V|=n$. Ребра графа имеют неотрицательные веса r_{ij}, обозначающие их *пропускные способности*; $R = (r_{ij})_{n\times n}$ – *матрица пропускных способностей*. Вершинам графа приписываются неотрицательные числа $q_i(t)$, изменяющиеся в дискретном времени t и называемые *ресурсами*. Вершины могут хранить неограниченное количество ресурса.

Состоянием $Q(t)$ сети в момент времени t называется вектор $Q(t) = (q_1(t),\ ...,\ q_n(t))$, содержащий значения ресурсов в вершинах в момент t.

Состояние $Q^* = (q_1^*, ..., q_n^*)$ называется *предельным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует t_ε такое, что для всех $t > t_\varepsilon$ $|q_i^* - q_i(t)| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Обозначив суммарный ресурс всех вершин через W, можно записать *закон сохранения*, выполняющийся в сети: $\forall\, t\ \sum\limits_{i=1}^{n} q_i(t) = W$.

$r_i^{in} = \sum\limits_{j=1}^{n} r_{ji}$ и $r_i^{out} = \sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij}$ – входная и выходная пропускные способности вершины соответственно. Пропускная способность петли, если она существует, входит в обе суммы. Суммарная пропускная способность сети: $r_{sum} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij}$.

В каждый момент t вершины $v_i,\ i = 1, ..., n$, передают ресурс по выходящим ребрам. *Стандартная модель* ресурсной сети характеризуется следующими правилами:

В момент t вершина v_i отдает в ребро e_{ij}, соединяющее ее с вершиной v_j:

- r_{ij} единиц ресурса, если $q_i(t) > r_i^{out}$ (правило 1);
- $\frac{r_{ij}}{r_i^{out}} q_i(t)$ единиц ресурса, если $q_i(t) \leqslant r_i^{out}$ (правило 2).

Смысл этих правил заключается в следующем. Правило 1 работает тогда, когда вершина содержит ресурса больше, чем может отдать, т.е. по каждому ребру отдается ресурс, равный пропускной способности этого ребра, а всего отдается $r_i^{out} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}$ ресурса. По правилу 2 вершина отдает весь свой ресурс, причем он распределяется пропорционально пропускным способностям ребер. Если ресурс в вершине равен выходной пропускной способности вершины: $q_i(t) = r_i^{out}$, то применение правил 1 и 2 даст одинаковые результаты.

Множество вершин, для которых $q_i(t) \leqslant r_i^{out}$, называется *зоной* $Z^-(t)$; множество вершин, для которых $q_i(t) > r_i^{out}$, называется *зоной* $Z^+(t)$.

Распределение ресурса происходит параллельно: на каждом такте все вершины, имеющие ресурс, отдают его во все исходящие ребра по правилу 1 или 2, в зависимости от его количества; вершины, смежные с ними, получают этот ресурс по входящим ребрам на следующем такте.

Важной характеристикой ресурсной сети является *пороговое значение ресурса* T: при $W \leqslant T$ все вершины, начиная с некоторого t', переходят в зону $Z^-(t)$ (функционируют по правилу 2); при $W > T$ зона $Z^+(t)$ непуста и не изменяется, начиная с некоторого t'' (существуют вершины, функционирующие по правилу 1). В [9] доказано, что в любой сети, кроме поглощающей, пороговое значение существует и единственно, а также предложены формулы, позволяющие найти значение T для всех классов сетей, в которых оно существует.

Поток ресурса

Ресурс, выходящий из вершины v_i по ребру e_{ij} в момент t, приходит в вершину v_j в момент $t + 1$. Между моментами t и $t + 1$ ресурс находится в ребре e_{ij}. Этот ресурс называется *потоком* $f_{ij}(t)$. Общий поток $F(t)$ описывается матрицей $F(t) = (f_{ij}(t))_{n\times n}$.

Величина $f_i^{out}(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} f_{ij}(t)$ – ресурс, выходящий из вершины v_i в момент t.

Величина $f_j^{in}(t+1) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{ij}(t)$ – ресурс, входящий в вершину v_j в момент $t+1$. Полагаем, что $f_j^{in}(0) = 0$.

3. Модель сети с «жадными» вершинами

3.1. ОПИСАНИЕ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим ресурсную сеть с наличием хотя бы одной петли. Ее функционирование определяется следующим образом:

Вершина v_i, имеющая петлю, на такте t отдает в петлю:

- r_{ii} ресурса, если $q_i(t) > r_{ii}$,
- весь свой ресурс $q_i(t)$, если $q_i(t) \leqslant r_{ii}$.

При этом в первом случае оставшийся ресурс $\Delta q_i(t) = q_i(t) - r_{ii}$ распределяется между другими вершинами по правилам стандартной ресурсной сети.

Интерпретировать такую модель можно как ресурсную сеть, у которой есть «запасливые» (или «жадные») вершины, т.е. вершины, передающие имеющийся ресурс в первую очередь самим себе.

Определение 1. *Будем говорить, что сеть остановилась на такте t, если* $\forall i = \overline{1,n}$ $q_i(t) \leqslant r_{ii}$.

Это определение говорит о том, что если количество ресурса во всех вершинах не превосходит пропускных способностей петель, то ресурс не перераспределяется между вершинами. Заметим, что остановка сети является частным случаем ее стабилизации.

Определение 2. *Назовем вершину v_i насыщенной в момент времени t, если $q_i(t) \geqslant r_{ii}$, перенасыщенной, если $q_i(t) > r_{ii}$, и ненасыщенной, если $q_i(t) < r_{ii}$.*

***Утверждение* 1.** *Вершина, насыщенная в момент времени t, в момент времени $t+1$ также останется насыщенной.*

Доказательство. Вершина v_i такова, что $q_i(t) \geqslant r_{ii}$. На такте $t+1$ ресурс равный r_{ii} пойдет в петлю, а оставшийся ресурс $(q_i(t) - r_{ii})$ распределится между остальными вершинами по правилам стандартной ресурсной сети. Таким образом, на такте $t+1$ имеем $q_i(t+1) \geqslant r_{ii}$.

Для перенасыщенной вершины введем понятие *свободного* ресурса.

Определение 3. *Свободный ресурс перенасыщенной вершины v_i – это ресурс, не задействованный петлей: $\Delta q_i(t) = q_i(t) – r_{ii}$.*

Пусть A – множество индексов насыщенных вершин:

(1) $$A = \Big\{k \in \{1, ..., n\} \mid q_k(t) \geqslant r_{ii}\Big\}.$$

Суммарный свободный ресурс в сети на такте t обозначим $\Delta Q(t)$, $\Delta Q(t) = \sum\limits_{i \in A} \Delta q_i(t)$.

3.2. СВОЙСТВА ПОЛНЫХ ОДНОРОДНЫХ СЕТЕЙ С «ЖАДНЫМИ ВЕРШИНАМИ»

В настоящем исследовании ограничимся исследованием полных однородных ресурсных сетей.

Ресурсная сеть называется *полной*, если $r_{ij} \neq 0 \; \forall i, j = \overline{1, n}$. *Однородность* сети означает, что $r_{ij} = r \; \forall i, j = \overline{1, n}$.

***Утверждение* 2.** *В полной однородной сети с «жадными» вершинами суммарное количество ресурса, полученное вершинами v_i, v_j от остальных вершин v_k, $k \in \{1, ..., n\} \backslash \{i, j\}$, одинаково на каждом такте t.*

Доказательство. Мы рассматриваем полную однородную сеть, а значит, и вершина v_i, и вершина v_j обязательно имеют ребра, соединяющие их с каждой из оставшихся вершин v_k, $k \in \{1, ..., n\} \backslash \{i, j\}$.

Суммарный ресурс, получаемый вершиной v_i от вершин v_k, $k \in \{1, ..., n\} \backslash \{i, j\}$, на такте t равен

$$f_i^{\{1..n\}\backslash\{i,j\}} = \sum_{k \in A \backslash \{i,j\}} \frac{\Delta q_k(t)}{n-1},$$

где A – множество насыщенных вершин (формула (1)).

Аналогично для вершины v_j:

$$f_j^{\{1..n\}\backslash\{i,j\}} = \sum_{k \in A \backslash \{i,j\}} \frac{\Delta q_k(t)}{n-1}.$$

Таким образом, $f_i^{\{1..n\}\backslash\{i,j\}} = f_j^{\{1..n\}\backslash\{i,j\}}$.

3.3. ПОРОГОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ РЕСУРСА

В стандартной ресурсной сети существует одно пороговое значение T, разделяющее ресурс на малый, когда все вершины на каждом такте отдают весь свой ресурс, и большой, когда излишки ресурса накапливаются в одной или нескольких вершинах (см. раздел 2).

Поведение сети с «жадными» вершинами сложнее. Определение 1 говорит о том, что существуют ситуации, в которых вершины перестают обмениваться ресурсом (сеть останавливается). В стандартных эргодических сетях такая ситуация невозможна.

В ресурсных сетях с «жадными» вершинами существуют два пороговых значения суммарного ресурса T_1 и T_2, которые разделяют зоны различного поведения сети. Если $W \leqslant T_1$ сеть останавливается – за конечное число тактов, или асимптотически, в зависимости от начального состояния.

Определение 4. *Суммарное значение ресурса, при котором функционирование сети останавливается, будем называть недостаточным.*

Максимальное значение ресурса, при котором вершины могут не обмениваться ресурсом, равно rn. Если в начальном состоянии этот ресурс распределить равномерно по n вершинам, сеть «остановится» на нулевом такте. Будем полагать, что для некоторых начальных состояний $T_1 = rn$. В следующем разделе будет доказано, что это значение единственно для любого начального состояния сети.

Если $W > rn$, на каждом такте будет существовать хотя бы одна вершина с ресурсом, превосходящим пропускную способность петли r. Это означает, что такая сеть никогда не остановится.

Определение 5. *Суммарное значение ресурса, при котором функционирование сети не останавливается, будем называть достаточным.*

Достаточный ресурс, по аналогии со стандартной сетью, делится порогом T_2 на *малый* ($T_1 < W \leqslant T_2$) и *большой* ресурс ($W > T_2$). Будет показано, что величина T_2 совпадает с пороговым значением $T = rn^2$ стандартной полной однородной сети.

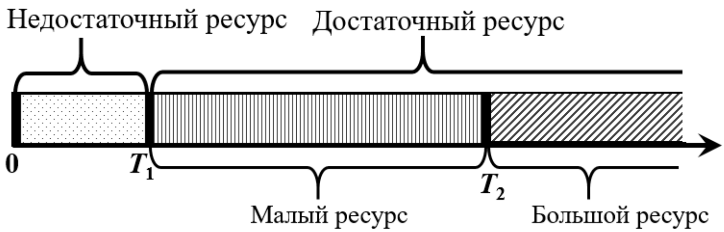

Рис. 1. Схема пороговых значений суммарного ресурса в сети с «жадными» вершинами

3.4. НЕДОСТАТОЧНЫЙ РЕСУРС

Рассмотрим функционирование сети при $W \leqslant rn$. В этом случае общее количество ресурса не превосходит сумму пропускных способностей петель.

Нетрудно убедиться, что в этом случае предельное состояние зависит от начального распределения ресурса. Например, если ресурс настолько мал, что в каждой вершине не превосходит r, то предельное состояние совпадает с начальным. Сформулируем ряд утверждений о возможных поведениях сети при недостаточном ресурсе.

Пусть $Q(0)$ – вектор начального состояния сети с n вершинами. Упорядочим вектор $Q(0)$ по убыванию его координат и в соответствии с этим перенумеруем вершины. Тогда вершина v_1 хранит наибольшее количество ресурса, а вершина v_n – наименьшее.

***Утверждение* 3.** (*Тривиальный случай.*) *Если $q_1(0) \leqslant r$, то сеть остановится на такте $t = 0$. Начальное состояние в данном случае будет предельным.*

Доказательство. $q_1(0) \leqslant r \;\Rightarrow\; \forall i = \overline{2, n}\; q_i(0) \leqslant q_1(0) \leqslant r$, а, значит, по определению, сеть остановилась на такте $t = 0$.

***Утверждение* 4.** (*Достаточное условие бесконечного функционирования сети.*) *Пусть $W \leqslant rn$. Если $q_1(0) > r$ и $q_2(0) \geqslant r$, то сеть будет функционировать бесконечно, останавливаясь в пределе.*

Доказательство утверждения приведено в приложении.

***Замечание* 1.** Для каждой насыщенной вершины сходимость к предельному состоянию, в котором она остановится, имеет характер затухающих колебаний.

Рассмотрим частный случай, когда ресурс сосредоточен только в двух первых вершинах. Для этого случая можно найти вектор предельного состояния в явном виде.

***Утверждение* 5.** *Пусть в полной однородной сети с «жадными» вершинами $W \leqslant rn$; $q_1(0) > r$ и $q_2(0) \geqslant r$, $q_i(0) = 0$, $i = \overline{3, n}$. Тогда ее предельное состояние задается вектором*

$$Q^* = \left(r,\ r,\ \frac{W - 2r}{n - 2},\ \ldots,\ \frac{W - 2r}{n - 2}\right). \tag{2}$$

Доказательство. По утверждению 2, суммарный ресурс, полученный вершинами v_1 и v_2 от остальных вершин $v_i,\ i = \overline{3, n}$, одинаков. Обозначим его через $w_{rest}(0)$.

По условию $w_{rest}(0) = 0$.

Докажем, что $\forall t\ w_{rest}(t) = 0$.

В самом деле, если $w_{rest}(0) = 0$, это означает, что все вершины $v_i,\ i = \overline{3, n}$, получили ресурс, больший r, – это напрямую следует из утверждения 2. Вершины $v_i,\ i = \overline{3, n}$, получают попарно одинаковый ресурс, а значит, их входной поток одинаков, в силу полноты сети и их симметричности относительно вершин v_1 и v_2. Но если для некоторого значения t $q_i(t) > r,\ i = \overline{3, n}$, то неравенство $W \leqslant rn$ не может быть выполненным: в силу утверждения 1 вершины v_1 и v_2 также останутся насыщенными, и суммарный ресурс превысит rn. Таким образом, $\forall t\ w_{rest}(t) = 0$. Тогда динамика ресурса в первых двух вершинах будет следующей:

$$q_1(1) = r + \frac{q_2(0) - r}{n - 1},\ q_2(1) = r + \frac{q_1(0) - r}{n - 1},$$

$$q_1(2) = r + \frac{q_1(0) - r}{(n - 1)^2},\ q_2(2) = r + \frac{q_2(0) - r}{(n - 1)^2},$$

$$\dots$$

$$q_1(t) = r + \frac{q_1(0) - r}{(n - 1)^t},\ q_2(t) = r + \frac{q_2(0) - r}{(n - 1)^t},$$

если t – четное, и

$$q_1(t) = r + \frac{q_2(0) - r}{(n - 1)^t},\ q_2(t) = r + \frac{q_1(0) - r}{(n - 1)^t},$$

если t – нечетное.

Пределом последовательности состояний вершин v_1 и v_2 при $t \to \infty$ будет r. По закону сохранения общего ресурса W в сети на остальные вершины в пределе останется $(W - 2r)$ ресурса, т.е. на каждую вершину $v_i,\ i = \overline{3, n}$, придется $\frac{W-2r}{n-2}$ ресурса:

$$W < rn \to \frac{W - 2r}{n - 2} < r.$$

Таким образом, предельное состояние описывается вектором (2).

Пример 1. В данном примере и в последующих будем рассматривать функционирование однородной ресурсной сети с пятью вершинами и единичными пропускными способностями: $r = 1$.

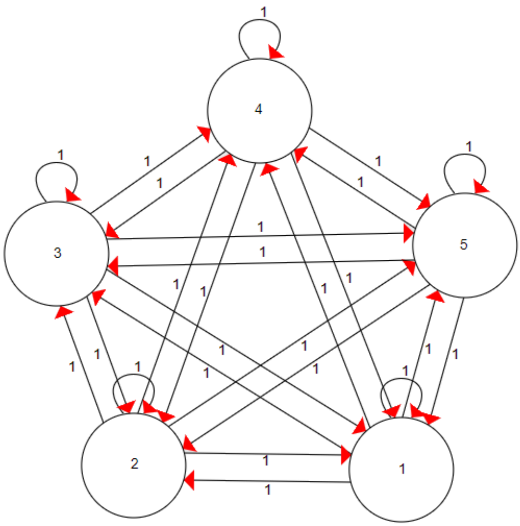

Рис. 2. Однородная ресурсная сеть с пятью вершинами, $r = 1$

Начальное состояние задано вектором: $Q(0) = (1{,}7; 1; 0{,}9; 0{,}6; 0{,}4)$. Суммарный ресурс $W = 4,6 < rn = 5$, что удовлетворяет условию «недостаточности» ресурса. При этом $q_1(0) = 1,7 > r$ и $q_2(0) = 1 = r$, а, значит, согласно утверждению 4, сеть будет функционировать бесконечно, останавливаясь в пределе.

Ресурс насыщенных вершин v_1, v_2 сходится к предельному состоянию в виде затухающих колебаний (рис. 3, таблица 1). Вершина v_3 также становится насыщенной на втором такте, поэтому и сходимость ее ресурса к предельному состоянию также имеет характер затухающих колебаний. Вершинам v_4, v_5 для насыщения не хватает начального ресурса; в этих вершинах ресурс увеличивается монотонно и в пределе не превосходит пропускной способности петли.●

Рассмотрим функционирование сети в нетривиальном случае ($q_1(0) > r$) с произвольным начальным состоянием.

Утверждение 6. *Пусть $W \leqslant rn$; $q_1(0) > r$. Тогда если $q_2(0) \leqslant \frac{rn - q_1(0)}{n-1}$, то сеть остановится на первом такте с со-*

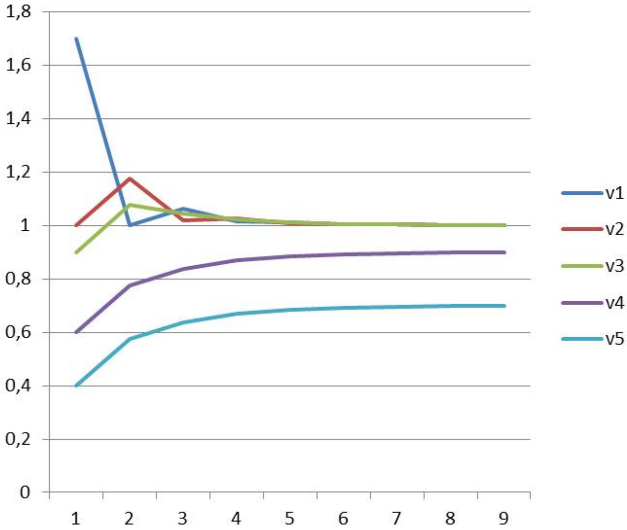

Рис. 3. Динамика ресурса в сети с начальным состоянием $Q(0) = (1{,}7; 1; 0{,}9; 0{,}6; 0{,}4)$

Таблица 1. Протокол работы сети с начальным состоянием $Q(0) = (1{,}7; 1; 0{,}9; 0{,}6; 0{,}4)$

t_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	1,7000	1,0000	0,9000	0,6000	0,4000
1	1,0000	1,1750	1,0750	0,7750	0,5750
2	1,0625	1,0188	1,0437	0,8375	0,6375
3	1,0156	1,0266	1,0203	0,8687	0,6687
...	...	...	...	...	...
10	1,0002	1,0002	1,0002	0,8998	0,6998
11	1,0001	1,0001	1,0001	0,8999	0,6999
12	1,0000	1,0000	1,0000	0,8999	0,6999
13	1,0000	1,0000	1,0000	0,9000	0,7000
14	1,0000	1,0000	1,0000	0,9000	0,7000
...	...	...	...	...	...

стоянием $Q^* = \left(r,\ q_2(0) + \frac{q_1(0)-r}{n-1},\ \ldots,\ q_n(0) + \frac{q_1(0)-r}{n-1}\right)$*. Иначе сеть будет функционировать бесконечно, останавливаясь в пределе.*

Доказательство. На первом такте вершина v_1 отдает в собственную петлю полную ее пропускную способность r, в остальные вершины она отдает $\frac{q_1(0)-r}{n-1}$ ресурса.

Пусть для вершины v_2 выполняется условие $q_2(0) < r$, так как в противном случае, согласно утверждению 4, сеть функционирует бесконечно и останавливается в пределе. В таком случае вершина v_2 на первом такте имеет состояние $q_2(1) = q_2(0) + \frac{q_1(0)-r}{n-1}$.

Теперь если $q_2(1) \leqslant r$, т.е. $q_2(0) \leqslant \frac{rn-q_1(0)}{n-1}$, то, по определению, сеть остановится на такте $t = 1$, так как во всех вершинах ресурса не больше, чем пропускная способность петли. Заметим, что $q_2(0) \leqslant \frac{rn-q_1(0)}{n-1} < \frac{rn-r}{n-1} = r$, т.е. условие $q_2(0) < r$ заведомо выполнено.

Если же $q_2(0) > \frac{rn-q_1(0)}{n-1}$ (а это то же самое, что $q_2(1) > r$), то, получив на первом такте $q_1(1) = r$ и перенумеровав вершины в порядке убывания ресурса (теперь $q_1(1) > r$ и $q_2(1) = r$), имеем ситуацию, удовлетворяющую достаточному условию бесконечного функционирования сети и ее остановки в пределе (утверждение 4).

Таким образом, если $q_2(0) \leqslant \frac{rn-q_1(0)}{n-1}$, то сеть остановится на первом такте с состоянием

$$Q^* = \left(r,\ q_2(0) + \frac{q_1(0)-r}{n-1},\ \ldots,\ q_n(0) + \frac{q_1(0)-r}{n-1}\right).$$

Если $q_2(0) > \frac{rn-q_1(0)}{n-1}$, то сеть будет функционировать бесконечно, останавливаясь в пределе.

Приведем в пример, иллюстрирующий утверждение 6.

Пример 2. Рассмотрим полную однородную сеть с пятью «жадными» вершинами, $r = 1$.

1. Рассмотрим динамику распределения ресурса между вер-

шинами при следующем начальном состоянии:

$$Q(0) = (3; 0{,}5; 0{,}3; 0{,}2; 0).$$

Здесь суммарный ресурс $W = 4$, что удовлетворяет условию «недостаточного» ресурса: $W \leqslant rn = 5$, где $n = 5$, $r = 1$. При этом $q_1(0) = 3 > r$ и $q_2(0) = 0{,}5 \leqslant \frac{rn - q_1(0)}{n-1} = \frac{5-3}{5-1} = 0{,}5$, а, значит, согласно утверждению 6, сеть остановится на первом же такте с состоянием

$$Q^* = \Big(r,\ q_2(0) + \frac{q_1(0) - r}{n-1},\ q_3(0) + \frac{q_1(0) - r}{n-1},$$

$$q_4(0) + \frac{q_1(0) - r}{n-1},\ q_5(0) + \frac{q_1(0) - r}{n-1}\Big) =$$

$$= \Big(1; 0{,}5 + \frac{3-1}{5-1}; 0{,}3 + \frac{3-1}{5-1}; 0{,}2 + \frac{3-1}{5-1}; 0 + \frac{3-1}{5-1}\Big) =$$

$$= (1; 1; 0{,}8; 0{,}7; 0{,}5).$$

Результаты программной реализации процесса функционирования сети приведены в таблице 2.

Таблица 2. Протокол работы сети с начальным состоянием $Q(0) = (3; 0{,}5; 0{,}3; 0{,}2; 0)$

t_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	3,0000	0,5000	0,3000	0,2000	0,0000
1	1,0000	1,0000	0,8000	0,7000	0,5000
2	1,0000	1,0000	0,8000	0,7000	0,5000

2. Рассмотрим динамику распределения ресурса между вершинами при другом начальном состоянии:

$$Q(0) = (3; 1; 0; 0; 0).$$

Здесь суммарный ресурс также $W = 4$. При этом $q_1(0) = 3 > r$ и $q_2(0) = 1 > \frac{rn - q_1(0)}{n-1} = \frac{5-3}{5-1} = 0{,}5$, а, значит, согласно утверждению 6, сеть будет функционировать бесконечно, останавливаясь в пределе. При этом, так как $q_3(0) = q_4(0) = q_5(0) = 0$, выполняются условия утверждения 5, и предельное состояние вычисляется по формуле (2).

Имеем:

$$\frac{W-2r}{n-2} = \frac{4-2}{5-2} = 0{,}6667.$$

Тогда

$$Q^* = (1; 1; 0{,}6667; 0{,}6667; 0{,}6667).$$

Результаты программной реализации процесса функционирования сети представлены в таблице 3 и на рис. 4.●

Таблица 3. Протокол работы сети с начальным состоянием $Q(0) = (3; 1; 0; 0; 0)$

t_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	3,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	1,0000	1,5000	0,5000	0,5000	0,5000
2	1,1250	1,0000	0,6250	0,6250	0,6250
3	1,0000	1,0313	0,6563	0,6563	0,6563
4	1,0078	1,0000	0,6641	0,6641	0,6641
5	1,0000	1,0020	0,6660	0,6660	0,6660
6	1,0005	1,0000	0,6665	0,6665	0,6665
7	1,0000	1,0001	0,6666	0,6666	0,6666
8	1,0000	1,0000	0,6667	0,6667	0,6667
9	1,0000	1,0000	0,6667	0,6667	0,6667
...	...	...	...	...	...

Теорема 1. *Первое пороговое значение ресурса T_1 полной однородной сети с «жадными» вершинами, отделяющее недостаточный ресурс от достаточного, единственно и равно rn для любого начального состояния.*

Доказательство. Утверждения 3 и 6 рассматривают все случаи распределения суммарного ресурса, не превосходящего rn. В каждом из этих случаев предельное состояние существует и сеть в нем останавливается.

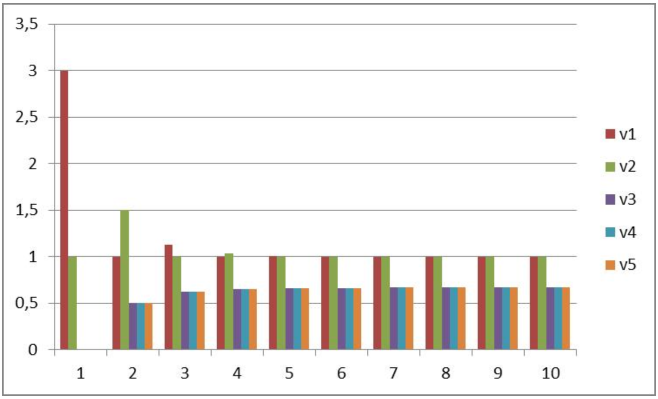

Рис. 4. Динамика ресурса в сети с начальным состоянием $Q(0) = (3; 1; 0; 0; 0)$

При суммарном ресурсе, строго большем rn, на каждом такте t хотя бы одна вершина будет иметь ресурс, больший r, а это означает, что $T_1 = rn$.

3.5. ДОСТАТОЧНЫЙ РЕСУРС

Рассмотрим функционирование сети при $W > T_1 = rn$. В этом случае сеть не останавливается.

Утверждение 7. *При суммарном ресурсе $W > T_1$ все вершины полной однородной сети с «жадными» вершинами насыщаются за конечное число тактов.*

Доказательство см. в приложении.

Поскольку в сети с «жадными» вершинами при достаточном ресурсе через конечное число тактов все вершины насыщаются, после насыщения ресурс, равный rn, находящийся в петлях, не участвует в потоке между вершинами. Рассмотрим сеть без петель с суммарным ресурсом $W - rn$. Полученная сеть в таком случае будет функционировать как стандартная модель с «нежадными» вершинами.

Утверждение 8. *Полная однородная ресурсная сеть с «жадными» вершинами при $W > rn$ с момента насыщения всех вершин функционирует эквивалентно соответствующей* *стандартной ресурсной сети без петель, у которой ресурс в каждой вершине уменьшен на величину пропускной способности петли r.*

Замечание 2. Здесь и далее будем говорить о сетях с количеством вершин $n > 2$, так как в случае $n = 2$ при переходе к эквивалентной стандартной сети, «отбросив» петли, мы получим нерегулярную сеть – эта сеть будет циклической с периодом 2; при малом ресурсе она не имеет предельного состояния.

В силу утверждения 8, на полную однородную сеть с «жадными» вершинами при $W > T_1$ переносятся свойства полной однородной стандартной ресурсной сети без петель.

Рассмотрим свойства полных однородных стандартных ресурсных сетей, описанные в [11], которые верны и для сетей без петель.

Свойство 1. *Если для некоторого t' выполняется равенство $q_i(t') = q_j(t')$, то для всех $t > t'$ также выполняется $q_i(t) = q_j(t)$.*

Это следует из того, что с момента t обе вершины получают одинаковое количество ресурса.

Свойство 2. *Если для некоторого t' вершина v_i находится в зоне $Z^-(t')$, то для всех $t > t'$ вершина v_i будет находиться в зоне $Z^-(t)$.*

Это следует из того, что v_i в момент времени t' отдает весь свой ресурс, а получить может не более чем $r(n-1)$. То есть $q_i(t'+1) \leqslant r(n-1) = r_i^{out}$, значит, вершина не может покинуть зону $Z^-(t)$.

Свойство 3. *Если все вершины находятся в зоне $Z^+(t)$, то состояние $Q(t)$ устойчиво.*

Это следует из того, что все вершины получают и отдают $r(n-1)$ ресурса.

Однако, ввиду отсутствия петель, следующие два свойства полной однородной сети не могут быть применимы к нашей модели.

Свойство 4. *Для любых t входные потоки всех вершин совпадают: $f_i^{in}(t) = f_j^{in}(t),\ i, j = 1, ..., n$.*

Свойство 5. *Если в момент t вершины $v_{i_1}, ..., v_{i_m}$ $(m \leqslant n)$ находятся в зоне $Z^-(t)$, то $q_{i_1}(t+1) = ... = q_{i_m}(t+1)$.*

Для проверки свойства 4 рассмотрим две любые вершины, например, v_1 и v_2.

В силу однородности сети, $\forall t\ f_{i1}(t) = ... = f_{in}(t),\ i = \overline{1, n}$. Расписав входные потоки вершин v_1 и v_2, получим:

$$f_1^{in}(t) = f_{21}(t) + f_{31}(t) + ... + f_{n1}(t),$$

$$f_2^{in}(t) = f_{12}(t) + f_{32}(t) + ... + f_{n2}(t),$$

так как $f_{11}(t) = f_{22}(t) = 0$ (петли отсутствуют).

$$f_1^{in}(t) - f_2^{in}(t) = f_{21}(t) - f_{12}(t),$$

что в общем случае не равно нулю, а, значит, свойство 4 не выполняется для полных однородных сетей без петель.

Поскольку вершины зоны $Z^-(t)$ отдают весь свой ресурс, то их ресурс в момент $t+1$ равен поступающему к ним входному потоку. Поэтому свойство 5 в общем случае также не выполняется.

Непосредственно из утверждения 8 следует центральный результат этого раздела.

Теорема 2. *Второе пороговое значение полной однородной сети с «жадными» вершинами T_2 совпадает с пороговым значением соответствующей стандартной сети с петлями: $T_2 = T = rn^2$.*

В самом деле, сеть с «жадными» вершинами при $W > rn$ ведет себя так же, как стандартная сеть без петель с ресурсом $W - rn$. Ее пороговое значение $T = rn^2 - rn$ (Теорема 2.1 [10]). Вернув назад петли вместе с циркулирующим в них ресурсом, равным rn, получим: $T_2 = T = rn^2$.

3.5.1. Малый ресурс

Рассмотрим функционирование сети при малом ресурсе: $T_1 < W \leqslant T_2$.

Случаи $W < T_2$ и $W = T_2$ рассмотрим отдельно.

Для описания процесса распределения ресурса между вершинами удобно говорить о ресурсной сети как о потоковой модели.

Введем два вектора:

$$out(t) = (f_1^{out}(t),\ ...,\ f_n^{out}(t)),\ in(t{+}1) = (f_1^{in}(t{+}1),\ ...,\ f_n^{in}(t{+}1)).$$

Тогда процесс функционирования сети можно записать в следующем виде:

$$Q(t+1) = Q(t) - out(t) + in(t+1).$$

Таким образом, переход из состояния в состояние можно описать в терминах матрицы $F(t)$.

Следующие утверждения доказываются в терминах потоков. Доказательства приведены в приложении.

Утверждение 9. *При $W < T_2$ вне зависимости от начального состояния $Q(0)$ все вершины полной однородной ресурсной сети с «жадными» вершинами переходят в зону $Z^-(t)$ за конечное число тактов.*

Утверждение 10. *Полная однородная ресурсная сеть с «жадными» вершинами при $W < T_2$ с момента насыщения всех вершин функционирует согласно формуле*

$$Q(t+1) = Q(t)R',\ R' = \frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Теорема 3. *Полная однородная ресурсная сеть с «жадными» вершинами при $W < T_2$ вне зависимости от начального состояния $Q(0)$ стабилизируется с предельным состоянием*

$$Q^* = \Big(\frac{W}{n},\ ...,\ \frac{W}{n}\Big).$$

Пример 3. Рассмотрим однородную ресурсную сеть с пятью «жадными» вершинами, $r = 1$ (см. рис. 1).

Рассмотрим динамику распределения ресурса между вершинами при начальном состоянии, подобранном таким образом, чтобы все вершины были уже насыщенными:

$$Q(0) = (3; 2; 2; 1; 1).$$

Суммарный ресурс $W = 9$ удовлетворяет условию $rn < W \leqslant \leqslant rn^2$, а значит, согласно утверждению 12, сеть стабилизируется с предельным состоянием $Q^* = \left(\frac{W}{n}, \ \ldots, \ \frac{W}{n}\right) = (1{,}8; \ldots; 1{,}8)$. Протокол работы сети приведен в таблице 4.

Таблица 4. Протокол работы сети с начальным состоянием $Q(0) = (3; 2; 2; 1; 1)$ *(модель «жадных» вершин)*

t_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	3,0000	2,0000	2,0000	1,0000	1,0000
1	1,5000	1,7500	1,7500	2,0000	2,0000
2	1,8750	1,8125	1,8125	1,7500	1,7500
3	1,7813	1,7969	1,7969	1,8125	1,8125
4	1,8047	1,8008	1,8008	1,7969	1,7969
5	1,7988	1,7998	1,7998	1,8008	1,8008
6	1,8003	1,8000	1,8000	1,7998	1,7998
7	1,7999	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000
8	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000
9	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000	1,8000
...	...	...	...	...	...

Теперь рассмотрим функционирование соответствующей стандартной сети. Здесь начальное состояние не будет включать ресурс, задействованный петлями:

$$Q(0) = (2; 1; 1; 0; 0).$$

Заметим, что для стандартной сети матрица пропускных способностей будет иной, так как мы не учитываем петли: $r_{ij} = 1$, если $i \neq j$, и $r_{ij} = 0$, если $i = j$.

Таблица 5. Протокол работы сети с начальным состоянием $Q(0) = (2; 1; 1; 0; 0)$ *(стандартная модель)*

t_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	2,0000	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000
1	0,5000	0,7500	0,7500	1,0000	1,0000
2	0,8750	0,8125	0,8125	0,7500	0,7500
3	0,7813	0,7969	0,7969	0,8125	0,8125
4	0,8047	0,8008	0,8008	0,7969	0,7969
5	0,7988	0,7998	0,7998	0,8008	0,8008
6	0,8003	0,8000	0,8000	0,7998	0,7998
7	0,7999	0,8000	0,8000	0,8000	0,8000
8	0,8000	0,8000	0,8000	0,8000	0,8000
9	0,8000	0,8000	0,8000	0,8000	0,8000
...	...	...	...	...	...

Рисунки 5 и 6 позволяют сравнить функционирование сети с «жадными» вершинами и соответствующей ей стандартной сети без петель.●

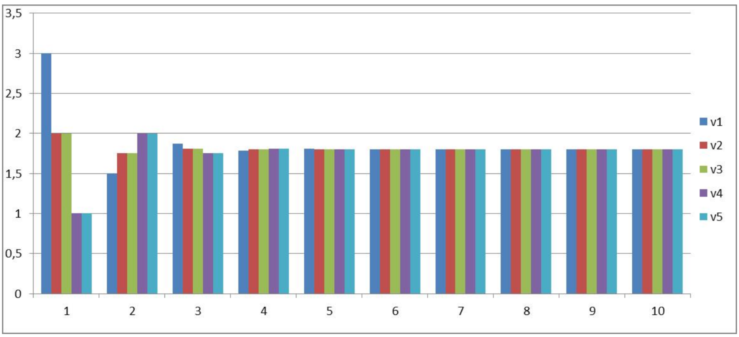

Рис. 5. Динамика ресурса в сети с начальным состоянием $Q(0) = (3; 2; 2; 1; 1)$ *(модель «жадных» вершин)*

Рассмотрим случай $W = rn^2$. Для него утверждение, что все вершины сети за конечное число тактов перейдут в зону $Z^-(t)$ неверно: ресурс хотя бы одной из вершин в этой ситуации будет

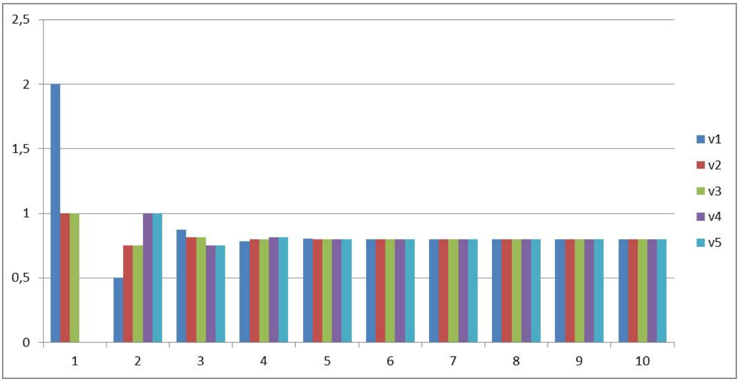

Рис. 6. Динамика ресурса в сети с начальным состоянием $Q(0) = (2; 1; 1; 0; 0)$ (стандартная модель)

стремиться к rn сверху. Поэтому формула для вычисления следующего состояния сети по предыдущему также неприменима: хотя бы одна из вершин будет функционировать по правилу 1. Однако можно показать, что и в таком случае зоны «достаточного малого» ресурса сеть стабилизируется с тем же самым предельным состоянием:

$$Q^*(t) = \left(\frac{W}{n}, \ \ldots, \ \frac{W}{n}\right) = (rn, \ \ldots, \ rn).$$

Теорема 4. *Полная однородная ресурсная сеть с «жадными» вершинами при $W = rn^2$ вне зависимости от начального состояния $Q(0)$ стабилизируется с предельным состоянием*

$$Q^*(t) = (rn, \ \ldots, \ rn).$$

3.5.2. Большой ресурс

Рассмотрим функционирование сети при $W > T_2 = rn^2$. «Большой ресурс» означает, что при любом начальном состоянии $Q(0)$ в любой момент времени зона $Z^+(t)$ будет непуста.

Функционирование сети с «жадными вершинами» при большом ресурсе наиболее близко к функционированию соответствующей стандартной сети без петель.

Свойства стандартных полных однородных ресурсных сетей без петель при большом ресурсе выполняются и для модели «жадных» вершин.

Утверждение 11. *Если все вершины находятся в зоне $Z^+(t)$, то состояние $Q(t)$ устойчиво.*

Доказательство. Справедливость этого свойства вытекает из того факта, что входной и выходной потоки каждой вершины одинаковы и равны rn.

Утверждение 12. *При большом суммарном ресурсе $W > T_2$ для произвольного начального состояния $Q(0)$ предельное состояние существует.*

Утверждение 13. *Пусть при большом суммарном ресурсе $W > T_2$ для произвольного начального состояния $Q(0)$ ресурс в вершинах упорядочен по убыванию и первые k вершин находятся в зоне $Z^+(0)$, а остальные $n-k$ вершин – в зоне $Z^-(0)$:*

$$q_1(0) \geqslant ...q_k(0) > rn \geqslant q_{k+1}(0) \geqslant q_n(0).$$

Тогда вектор предельного состояния Q^* будет иметь вид

$$Q^* = (rn + \delta q_1, ..., rn + \delta q_l, rn, ...rn),$$

где $l \leqslant k$; $\delta q_i, i = 1, ..., l$ – излишки ресурса вершин, оставшихся в зоне Z^{+*}.

4. Заключение

Предложена и формально описана неклассическая модель ресурсной сети – сеть с «жадными» вершинами. «Жадность» вершин заключается в том, что на каждом такте они передают ресурс сначала в свою петлю, а после этого остаток распределяют в исходящие рёбра. Была исследована сеть, представленная полным однородным графом (полным графом, у которого веса ребер одинаковы).

Описано функционирование сети при любом количестве ресурса, доказана сходимость процессов перераспределения ресурса, найдены предельные состояния. Показано, что при некоторых значениях суммарного ресурса сеть останавливается. Это особенно примечательно тем, что в стандартной регулярной сети остановка функционирования невозможна.

Найдены пороговые значения $T_1 = rn$ и $T_2 = rn^2$, разграничивающие зоны различного поведения сети:

1) «недостаточный» ресурс: $W \leqslant T_1$,
2) «достаточный» ресурс: $W > T_1$
   а) «достаточный малый» ресурс: $T_1 < W \leqslant T_2$,
   б) «достаточный большой» ресурс: $W > T_2$.

В дальнейшем планируется изучение сетей с «жадными» вершинами для других топологий; нахождение их основных характеристик, исследование устойчивости и нахождение векторов предельных состояний и потоков для разных величин суммарного ресурса и начальных состояний сети.

Литература

1. АБДУЛРАХМАН Х., ЕРУСАЛИМСКИЙ Я.М., СКОРОХОДОВ В.А. *Ресурсные сети с вентильной достижимостью* // Инженерный вестник Дона. – 2018. – №4. – 12 с.
2. АБДУЛРАХМАН Х., СКОРОХОДОВ В.А. *Ресурсные сети с магнитной достижимостью* // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2016. – №4. – С. 4–10.
3. АБДУЛРАХМАН Х., СКОРОХОДОВ В.А. *Полные двухресурсные сети с петлями* // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2016. – №2. – С. 10–16.
4. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик (обзор базовых результатов)* // Управление большими системами. – 2010. – Вып. 30.1 – С. 470–505.

5. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Метод проекции в задаче о консенсусе и регуляризованный предел степеней стохастической матрицы* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №12. – С. 38–59.
6. АНТОНОВА В.М., ЗАХИР Б.М., КУЗНЕЦОВ Н.А. *Моделирование графов с различными видами достижимости с помощью языка Python* // Информационные процессы. – 2019. – Том 19, №2. – С. 159–169.
7. ГУБАНОВ Д.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Социальные сети. Модели информационного влияния, управления и противоборства.* – М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2010. – 228 с.
8. ЕРУСАЛИМСКИЙ Я.М., СКОРОХОДОВ В.А., КУЗЬМИНОВА М.В., ПЕТРОСЯН А.Г. *Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения.* – Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2009. – 195 с.
9. ЖИЛЯКОВА Л.Ю., КУЗНЕЦОВ О.П. *Теория ресурсных сетей: монография.*– М.: РИОР: ИНФРА- М, 2017. — 283 с.
10. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Ресурсные сети с ограничениями на ёмкость вершин* [Электронный ресурс]: монография. – М.: ИЦ РИОР, НИЦ ИНФРА-М, 2018. – 160 с.
11. КУЗНЕЦОВ О.П. *Однородные ресурсные сети. I. Полные графы* // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №11. – С. 136–147.
12. СКОРОХОДОВ В.А., АБДУЛРАХМАН Х. *Динамические ресурсные сети. Случай малого ресурса* // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2018. – №4. – С.186-194.
13. BAK P., TANG C., WIESENFELD K. *Self-organized criticality* // Phys. Rev. A. – 1988. – Vol. 38, No. 1. – P. 364–374.
14. BAK P., CHEN K. *Self-organized criticality* // Scientif. Am. – 1991. – No. 264. – P. 46–53.
15. BJORNER A., LOVASZ L. *Chip-firing game on directed graphs* // J. Algebraic Combinatorics. – 1992. – No. 1. – P. 305–328.

16. BLANCHARD PH., VOLCHENKOV D. *Random Walks and Diffusions on Graphs and Databases: An Introduction (Springer Series in Synergetics).* – Springer-Verlag – Berlin – Heidelberg, 2011. – 262 p.
17. DHAR D. *The abelian sandpile and related models* // Physica A: Statist.l Mechan. Appl. – 1 February, 1999. – Vol. 263, No. 1–4. – P. 4–25.
18. DHAR D., SADHU T., CHANDRA S. *Pattern formation in growing sandpiles* // Eur. Phys. Lett. – 2009. – Vol. 85, No. 4. – 48002. 2009. arXiv:0808.1732 [cond-mat.stat-mech]
19. GLASS D., KAPLAN N. *Chip-Firing Games and Critical Groups* // Cornell University 12 Aug 2019 arXiv 1908.04395 [math.CO]
20. IVASHKEVICH E.V., PRIEZZHEV V.B. *Introduction to the sandpile model* // Physica. – 1998. – A 254. – P. 97–116.
21. MASUDA N., PORTER M.A., LAMBIOTTE R. *Random walks and diffusion on networks* / Physics Reports. – 2017. – Vol. 716–717. – P. 1–58.
22. PRISNER E. *Parallel Chip Firing on Digraphs* // Complex Systems. – 1994. – No. 8. – P. 367–383.
23. SMYTH W.D., NASH J.D., MOUM J.N. *Self-organized criticality in geophysical turbulence* // Scientific Reports. – 6 March 2019. – URL: https://www.nature.com/articles/s41598-019-39869-w.
24. SPEER E.R. *Asymmetric abelian sandpile models* // Journal of Statistical Physics. – April 1993. – Vol. 71, Iss. 1–2. – P. 61–74.

5. Приложение

Доказательство утверждения 4.

1. Докажем бесконечное функционирование сети.

Пусть $q_1(0) > r$ и $q_2(0) \geqslant r$.

На такте $t = 1$ вершина v_1 отдает каждой другой вершине ресурс $\frac{q_1(0)-r}{n-1}$, а вершина v_2 – ресурс $\frac{q_2(0)-r}{n-1}$. По утверждению 2, суммарный ресурс, полученный вершинами v_1 и v_2 от остальных вершин v_i, $i = \overline{3, n}$, одинаков. Обозначим его через $w_{rest}(0)$. Тогда к концу первого такта имеем:

$$q_1(1) = r + \frac{q_2(0) - r}{n - 1} + w_{rest}(0),$$

$$q_2(1) = r + \frac{q_1(0) - r}{n - 1} + w_{rest}(0).$$

К концу второго такта аналогичным образом получим:

$$q_1(2) = r + \frac{q_1(0) - r}{(n - 1)^2} + \frac{w_{rest}(0)}{n - 1} + w_{rest}(1),$$

$$q_2(2) = r + \frac{q_2(0) - r}{(n - 1)^2} + \frac{w_{rest}(0)}{n - 1} + w_{rest}(1).$$

Соответственно на такте t имеем:

$$q_1(t) = r + \frac{q_1(0) - r}{(n - 1)^t} + \frac{w_{rest}(0)}{(n - 1)^{t-1}} + ... + \frac{w_{rest}(t - 2)}{n - 1} + w_{rest}(t-1),$$

$$q_2(t) = r + \frac{q_2(0) - r}{(n - 1)^t} + \frac{w_{rest}(0)}{(n - 1)^{t-1}} + ... + \frac{w_{rest}(t - 2)}{n - 1} + w_{rest}(t-1),$$

если t – четное, и

$$q_1(t) = r + \frac{q_2(0) - r}{(n - 1)^t} + \frac{w_{rest}(0)}{(n - 1)^{t-1}} + ... + \frac{w_{rest}(t - 2)}{n - 1} + w_{rest}(t-1),$$

$$q_2(t) = r + \frac{q_1(0) - r}{(n - 1)^t} + \frac{w_{rest}(0)}{(n - 1)^{t-1}} + ... + \frac{w_{rest}(t - 2)}{n - 1} + w_{rest}(t-1),$$

если t – нечетное.

Видим, что $q_1(t) > r$ при любом четном t и $q_2(t) > r$ при любом нечетном t. Значит, $\forall t$ как минимум одна вершина будет перенасыщенная, а это значит, что сеть не остановится и будет функционировать бесконечно.

2. Докажем асимптотическую остановку сети.

Рассмотрим динамику суммарного свободного ресурса.

Пусть k_t – число перенасыщенных вершин на такте t, k_{t+1} – число перенасыщенных вершин на такте $t+1$. При этом $\forall t$ $k_t < n-1$ (так как $W \leqslant rn$, то все вершины сети не могут быть перенасыщенными). Суммарный свободный ресурс на такте t равен $\Delta Q(t) = \sum\limits_{i=1}^{k_t} \Delta q_i(t)$. Суммарный свободный ресурс на такте $t+1$ тогда будет выглядеть следующим образом:

$$\Delta Q(t+1) = \sum_{i=1}^{k_t} \Delta q_i(t+1) + \sum_{i=k_t+1}^{k_{t+1}} \Delta q_i(t+1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k_t} \sum_{j=1,\ j\neq i}^{k_t} \frac{\Delta q_j(t)}{n-1} + \sum_{i=k_t+1}^{k_{t+1}} \Big(\sum_{j=1}^{k_t} \frac{\Delta q_j(t)}{n-1} - (r - q_i(t)) \Big).$$

Упростим первое слагаемое:

$$\sum_{i=1}^{k_t} \sum_{j=1,\ j\neq i}^{k_t} \frac{\Delta q_j(t)}{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k_t} \Big(\sum_{j=1}^{k_t} \Delta q_j(t) - \Delta q_i(t) \Big) =$$

$$= \frac{1}{n-1} \Big(k_t \sum_{j=1}^{k_t} \Delta q_j(t) - \sum_{i=1}^{k_t} \Delta q_i(t) \Big) = \frac{k_t - 1}{n-1} \Delta Q(t).$$

Второе слагаемое не только упростим, но и оценим сверху:

$$\sum_{i=k_t+1}^{k_{t+1}} \Big(\sum_{j=1}^{k_t} \frac{\Delta q_j(t)}{n-1} - (r - q_i(t)) \Big) = \sum_{i=k_t+1}^{k_{t+1}} \Big(\frac{\Delta Q(t)}{n-1} - (r - q_i(t)) \Big) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=k_t+1}^{n-1} \frac{\Delta Q(t)}{n-1} = \frac{n-1-k_t}{n-1} \Delta Q(t).$$

Подставляя в исходную формулу результаты преобразований, имеем:

$$\Delta Q(t+1) \leqslant \frac{k_t - 1}{n-1}\Delta Q(t) + \frac{n-1-k_t}{n-1}\Delta Q(t),$$

$$\Delta Q(t+1) \leqslant \frac{n-2}{n-1}\Delta Q(t).$$

Таким образом, последовательность значений суммарного свободного ресурса ограничена сверху убывающей геометрической прогрессией, а, значит, предел этой последовательности равен нулю. Это, в свою очередь, означает, что стремится к нулю и общий поток в сети (исключая поток в петлях), так как он создается только свободным ресурсом. Очевидно, что изменение ресурса в вершинах при этом также стремится к нулю, т.е. сеть стабилизируется и останавливается. $\square$

Доказательство утверждения 7.

Пусть в сети в момент времени t_0 имеется k перенасыщенных вершин $v_i,\ i = \overline{1,k},\ k < n$. Если вершины $v_j,\ j = \overline{k+1,n}$, являются насыщенными, то утверждение уже доказано. Рассмотрим ситуацию, когда среди $v_j,\ j = \overline{k+1,n}$, есть хотя бы одна ненасыщенная, и докажем, что эта вершина насытится за конечное число тактов.

В силу условия $W > rn$ верно следующее: $\forall t\ \Delta Q(t) \geqslant W - rn$ (равенство наступает тогда, когда все вершины сети насыщены).

От каждой вершины $v_i,\ i = \overline{1,k}$, ненасыщенной вершине v_j на такте $t_0 + 1$ передается r ресурса, если $\frac{\Delta q_i(t_0)}{n-1} \geqslant r$, и $\frac{\Delta q_i(t_0)}{n-1}$ ресурса, если $\frac{\Delta q_i(t_0)}{n-1} < r$. Объединив эти условия, получим, что v_j получает $min\{r, \frac{\Delta q_i(t_0)}{n-1}\}$ ресурса от каждой перенасыщенной вершины. Тогда

$$q_j(t_0+1) - q_j(t_0) = \sum_{i=1}^{k} min\Big\{r, \frac{\Delta q_i(t_0)}{n-1}\Big\}.$$

Если хотя бы для одной вершины $v_i, i=\overline{1,k}, min\{r, \frac{\Delta q_i(t_0)}{n-1}\}=r$, то имеем

$$q_j(t_0+1)-q_j(t_0) = \ ... \ +r \geqslant r.$$

Если же для всех вершин v_i, $i = \overline{1,k}$, $min\{r, \frac{\Delta q_i(t_0)}{n-1}\} = \frac{\Delta q_i(t_0)}{n-1}$, то имеем

$$q_j(t_0+1)-q_j(t_0) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta q_i(t_0)}{n-1} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} \Delta q_i(t_0) =$$

$$= \frac{\Delta Q(t_0)}{n-1} \geqslant \frac{W-rn}{n-1}.$$

Получаем, что на каждом такте ресурс в ненасыщенной вершине увеличивается не менее чем на $min\{r, \frac{W-rn}{n-1}\}$. Тогда любая ненасыщенная на такте t_0 вершина за число шагов не более чем

$$\frac{r-q_i(t_0)}{min\{r, \frac{W-rn}{n-1}\}}$$

достигнет своего насыщения. Отметим, что если $min\{r, \frac{W-rn}{n-1}\} = r$, то

$$\frac{r-q_i(t_0)}{min\{r, \frac{W-rn}{n-1}\}} = \frac{r-q_i(t_0)}{r} = 1 - \frac{q_i(t_0)}{r}$$

и, значит, вершина насытится за 1 такт. $\square$

Доказательство утверждения 9.

Перейдем в координаты стандартной ресурсной сети: имеем полную однородную сеть без петель, ресурс в каждой вершине уменьшен на r. Тогда ограничение на суммарный ресурс принимает вид $W < rn^2 - rn = rn(n-1)$, и в сети всегда будет хотя бы одна вершина из зоны $Z^-(t)$. Пусть в начальном состоянии имеется k вершин находятся в зоне $Z^+(0)$ и $n-k$ вершин – в зоне $Z^-(0)$:

$$v_1, ..., v_k \in Z^+(0), \ v_{k+1}, ..., v_n \in Z^-(0).$$

То есть ресурс распределен следующим образом:
$$q_i(0) = \begin{cases} > r_i^{out} = r(n-1),\ i = \overline{1,k}, \\ \leqslant r_i^{out} = r(n-1),\ i = \overline{k+1,n}. \end{cases}$$

1. Согласно свойству 2 полной однородной сети без петель, вершина, попавшая в зону $Z^-(t)$, уже из нее не выйдет.
2. Рассмотрим вершину, которая в начальном состоянии находится в зоне $Z^+(0)$. Не нарушая общности, положим, что это вершина v_1. Выпишем её выходной и входной поток:
$$f_1^{out}(0) = r_1^{out} = r(n-1),$$
$$f_1^{in}(1) = \sum_{i=2}^{k} r + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{q_i(0)}{n-1} = r(k-1) + \frac{1}{n-1}\sum_{i=k+1}^{n} q_i(0).$$
Разность между выходным и входным потоком есть некоторая величина Δf, показывающая, насколько уменьшился ресурс в вершине:
$$\Delta f = f_{k+1}^{out}(0) - f_{k+1}^{in}(1) = r(n-1) - r(k-1) - \frac{1}{n-1}\sum_{i=k+1}^{n} q_i(0) =$$
$$= r(n-k) - \frac{1}{n-1}\sum_{i=k+1}^{n} q_i(0).$$
Используя тот факт, что $q_i(0) > r(n-1),\ i = \overline{1,k}$, получим:
$$\sum_{i=k+1}^{n} q_i(0) = W - \sum_{i=1}^{k} q_i(0) < W - rk(n-1).$$
Тогда можно оценить Δf снизу:
$$\Delta f > r(n-k) - \frac{1}{n-1}(W - rk(n-1)) = rn - \frac{W}{n-1} > 0.$$
Таким образом, на каждом такте ресурс вершины v_1 уменьшается на некоторую ограниченную снизу величину $\Delta f > rn - \frac{W}{n-1}$. То-

гда любая вершина v_i, находящаяся в начальном состоянии в зоне $Z^+(0)$, за число шагов менее чем

$$\frac{q_i(0)-r(n-1)}{rn-\frac{W}{n-1}}$$

перейдет в зону $Z^-(t)$. $\square$

Доказательство утверждения 10.

При $W < rn^2$ с определенного момента времени все вершины сети передают ресурс по правилу 2, тогда матрица потока выглядит следующим образом:

$$F = \begin{pmatrix} r & \frac{q_1(t)-r}{n-1} & \dots & \frac{q_1(t)-r}{n-1} \\ \frac{q_2(t)-r}{n-1} & r & \dots & \frac{q_2(t)-r}{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{q_n(t)-r}{n-1} & \frac{q_n(t)-r}{n-1} & \dots & r \end{pmatrix}.$$

То есть полную пропускную способность r вершина v_i отдает в петлю, а оставшийся ресурс $\Delta q_i(t) = q_i(t) - r$ делит пропорционально между остальными вершинами (работает по правилу 2 стандартной ресурсной сети). Таким образом, вершины отдают весь свой ресурс, и каждое новое состояние состоит из ресурса, пришедшего на данном такте: $Q(t+1) = in(t+1)$. Тогда для вершины v_j новое состояние $q_j(t+1)$ будет $f_j^{in}(t+1)$, т.е. суммой элементов j-го столбца матрицы $F(t)$.

$$f_j^{in}(t+1) = r + \sum_{i=1,\ i\neq j}^{n} \frac{q_i(t)-r}{n-1} =$$

$$= r + \sum_{i=1,\ i\neq j}^{n} \frac{q_i(t)}{n-1} - \frac{r(n-1)}{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1,\ i\neq j}^{n} q_i(t),$$

$$in(t+1) = (f_1^{in}(t+1),\ \dots,\ f_n^{in}(t+1)) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=2}^{n} q_i(t),\ \sum_{i=1,\ i\neq 2}^{n} q_i(t),\ ...,\ \sum_{i=1}^{n-1} q_i(t)\Big) =$$

$$= \frac{1}{n-1}(q_1(t),\ ...,\ q_n(t)) \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & 0 \end{pmatrix} = Q(t)R'.$$

Получили искомую формулу (3):

$$Q(t+1) = Q(t)R',\ R' = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & 0 \end{pmatrix}. \square$$

К доказательству этого утверждения можно подойти по-другому. Перейдем в координаты соответствующей стандартной ресурсной сети.

Для нахождения вектора новых состояний вершин в координатах стандартной ресурсной сети $Q_{st}(t+1)$ можно применить имеющуюся из теории стандартных ресурсных сетей формулу: $Q_{st}(t+1) = Q_{st}(t)R'$. Здесь матрица R' будет иметь вид:

$$R' = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

Переходя обратно в координаты исходной модели, имеем:

$$Q(t+1) = Q_{st}(t+1) + b_r,$$

где $b_r = (r,\ ...,\ r)$, получим:

$$Q(t+1) = (Q(t) - b_r)R' + b_r = Q(t)R' - b_rR' + b_r = Q(t)R' - b,$$

где

$$b = b_rR' - b_r = b_r(R' - E) =$$

$$= \frac{1}{n-1}(r,\ ...,\ r)\begin{pmatrix} 1-n & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1-n & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & 1-n \end{pmatrix} = (0, ..., 0).$$

Тогда зависимость вектора нового состояния сети от вектора предыдущего состояния сети выражается формулой (3). □

Доказательство теоремы 3.

Полная однородная ресурсная сеть с «жадными» вершинами при $W < rn^2$ стабилизируется в случае, если стабилизируется соответствующая стандартная ресурсная сеть. В [9] доказано, что регулярная сеть при малом ресурсе всегда имеет единственное предельное состояние. Из этого факта и утверждения 10 следует стабилизация исходной сети с «жадными» вершинами при $W < rn^2$.

Найдем соответствующее предельное состояние сети. Используя формулу из утверждения 11, запишем состояния сети на тактах $t+1,\ t+2,\ t+3,\ ...\ t+k$.

$$Q(t+1) = Q(t)R' = \frac{1}{n-1}\Big(q_1(t),\ ...,\ q_n(t)\Big)\begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=2}^{n} q_i(t),\ ...,\ \sum_{i=1}^{n-1} q_i(t)\Big) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\Big(W - q_1(t),\ ...,\ W - q_n(t)\Big) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\Big(W,\ ...,\ W\Big) - \frac{1}{n-1}Q(t),$$

$$Q(t+2) = Q(t+1)R' =$$

$$= \frac{1}{(n-1)^2}\Big(\Big(W,\ ...,\ W\Big) - \Big(q_1(t),\ ...,\ q_n(t)\Big)\Big) \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)^2}\Big(\Big((n-1)W,\ ...,\ (n-1)W\Big) - \Big(\sum_{i=2}^{n} q_i(t),\ ...,\ \sum_{i=1}^{n-1} q_i(t)\Big)\Big) =$$

$$= \Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)^2}\Big)\Big(W,\ ...,\ W\Big) + \frac{1}{(n-1)^2} Q(t).$$

Аналогично находим $Q(t+3)$:

$$Q(t+3) = Q(t+2)R' = \ ...\ =$$

$$= \Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-1)^3}\Big)\Big(W,\ ...,\ W\Big) - \frac{1}{(n-1)^3} Q(t).$$

Для такта $t+k$ таким образом получим:

$$Q(t+k) = Q(t)\frac{(-1)^k}{(n-1)^k} + \Big(W,\ ...,\ W\Big)\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{i+1}}{(n-1)^i} =$$

$$= Q(t)\frac{1}{(1-n)^k} - \Big(W,\ ...,\ W\Big)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(1-n)^i}.$$

Перейдем к пределу при $k \to \infty$. Учитывая, что для первого слагаемого

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{(1-n)^k} = 0,$$

а предел суммы убывающей геометрической прогрессии равен

$$\lim_{k\to\infty}\Big(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(1-n)^i}\Big) = \frac{\frac{1}{1-n}}{1-\frac{1}{1-n}} = -\frac{1}{n},$$

получим искомое предельное состояние системы:

$$Q^* = \Big(\frac{W}{n},\ ...,\ \frac{W}{n}\Big).\ \square$$

Доказательство теоремы 4.

Перейдем в координаты стандартной ресурсной сети: имеем полную однородную сеть без петель, ресурс в каждой вершине уменьшен на r. Тогда суммарный ресурс равен $W = rn^2 - rn = = rn(n-1)$. Пусть в начальном состоянии $t=0$ имеется $k(0)=k_0$ вершин из зоны $Z^+(0)$ и $n - k_0$ вершин из зоны $Z^-(0)$:

$$v_1, ..., v_{k_0} \in Z^+(0),\ v_{k_0+1}, ..., v_n \in Z^-(0).$$

То есть ресурс распределен следующим образом:

$$q_i(0) = \begin{cases} > r_i^{out} = r(n-1),\ i = \overline{1, k_0}, \\ \leqslant r_i^{out} = r(n-1),\ i = \overline{k_0+1, n}. \end{cases}$$

Целочисленная функция $k(t)$ является монотонной невозрастающей: вершины из зоны $Z^-(0)$ не могут ее покинуть, согласно свойству 2 полной однородной сети без петель, а, значит, и $k(t)$ с увеличением времени не возрастает.

Рассмотрим входной и выходной потоки вершины v_i, которая в начальном состоянии находится в зоне $Z^+(0)$, т.е. $i \in \{1,\ ...,\ k_0\}$:

$$f_i^{out}(0) = r_1^{out} = r(n-1),$$

$$f_i^{in}(1) = \sum_{i=2}^{k_0} r + \sum_{i=k_0+1}^{n} \frac{q_i(0)}{n-1} = r(k_0-1) + \frac{1}{n-1} \sum_{i=k_0+1}^{n} q_i(0).$$

Состояние вершины v_i на следующем такте $t = 1$:

$$q_i(1) = q_i(0) - f_i^{out}(0) + f_i^{in}(1) =$$

$$= q_i(0) - r(n-1) + r(k_0-1) + \frac{1}{n-1} \sum_{i=k_0+1}^{n} q_i(0) =$$

$$= q_i(0) + r(k_0-n) + \frac{1}{n-1} \sum_{i=k_0+1}^{n} q_i(0).$$

На такте $t = 2$ получим аналогичную формулу; вместо k_0 здесь будет уже $k(1) = k_1$ – количество вершин из зоны $Z^+(1)$ на такте $t = 1$:

$$q_i(2) = q_i(1) + r(k_1 - n) + \frac{1}{n-1} \sum_{i=k_1+1}^{n} q_i(1).$$

Для такта $t + 1$ имеем соответственно

$$q_i(t+1) = q_i(t) + r(k(t) - n) + \frac{1}{n-1} \sum_{i=k(t)+1}^{n} q_i(t).$$

Рассмотрим динамику избыточного ресурса (обозначим его $\delta q_i(t)$) в вершине v_i. Под избыточным ресурсом будем понимать ту часть ресурса вершины v_i, которая позволяет ей находиться в зоне $Z^+(t)$ на такте t, т.е. $\delta q_i(t) = q_i(t) - r(n-1)$. Распишем избыточный ресурс в вершине v_i на такте $t + 1$:

$$\delta q_i(t+1) = q_i(t+1) - r(n-1) =$$

$$= q_i(t) + r(k(t) - n) + \frac{1}{n-1} \sum_{i=k(t)+1}^{n} q_i(t) - r(n-1).$$

Выразим $\delta q_i(t+1)$ через $\delta q_i(t)$:

$$\delta q_i(t+1) = \delta q_i(t) + r(k(t) - n) + \frac{1}{n-1} \sum_{i=k(t)+1}^{n} q_i(t).$$

Последнее слагаемое в формуле распишем:

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=k(t)+1}^{n} q_i(t) = \frac{1}{n-1}\Big(W - \sum_{i=1}^{k(t)} q_i(t)\Big) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\Big(rn(n-1) - \sum_{i=1}^{k(t)} q_i(t)\Big) = rn - \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k(t)} q_i(t).$$

Учитывая, что $q_i(t) = r(n-1) + \delta q_i(t),\ i = 1,\ ...,\ k(t)$, имеем

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=k(t)+1}^{n} q_i(t) = rn - \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k(t)}(r(n-1)+\delta q_i(t)) =$$

$$= rn - rk(t) - \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k(t)}\delta q_i(t).$$

Тогда

$$\delta q_i(t+1) = \delta q_i(t) + r(k(t)-n) + rn - rk(t) - \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k(t)}\delta q_i(t) =$$

$$= \delta q_i(t) - \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k(t)}\delta q_i(t) \leqslant \delta q_i(t) - \frac{1}{n-1}\delta q_i(t) = \frac{n-2}{n-1}\delta q_i(t),$$

$$\delta q_i(t+1) \leqslant \frac{n-2}{n-1}\delta q_i(t).$$

Последовательность избыточных ресурсов вершины v_i ограничена сверху убывающей геометрической прогрессией, а значит, предел этой последовательности равен нулю. Отсюда следует, что ресурсы в вершинах, принадлежащих зоне $Z^+(0)$ в начальный момент времени, стремятся к состояниям $q_i^*(t) = r(n-1)$, $i = 1, ..., k_0$. По закону сохранения ресурса в сети, ресурсы в вершинах, принадлежащих зоне $Z^-(0)$ в начальный момент времени, также будут стремиться к состояниям $q_i^*(t) = r(n-1)$, $i = k_0 + 1,\ ...,\ n$. Таким образом, сеть стабилизируется с предельным состоянием $Q^*(t) = (r(n-1),\ ...,\ r(n-1))$, или, в переводе обратно в координаты «жадных» вершин, с предельным состоянием $Q^*(t) = (rn,\ ...,\ rn)$. $\square$

RESEARCH OF COMPLETE HOMOGENEOUS «GREEDY-VERTICES» RESOURCE NETWORKS

Ludmila Zhilyakova, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow , Moscow, Doct.Sc.(zhilyakova.ludmila@gmail.com).
Nadezda Chaplinskaya, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow , Moscow, student (nadya1462@gmail.com).

Abstract: The modification of the graph dynamic model "resource network" – "resource network with greedy vertices" is described. In this model, the graph vertices at each discrete-time moment exchange resources through the edges with limited throughput, first passing the available resource to themselves via the loop and then distributing the remaining resource to adjacent vertices according to the "standard" resource network rules. These are two rules with threshold switching: if the vertex resource exceeds the total throughput of all its outgoing edges, it gives away the full throughput to each edge; otherwise, it gives the entire available resource, distributing it in proportion to the throughputs of the outgoing edges. The process of functioning of a complete homogeneous resource network with "greedy" vertices at different values of total resource and different initial states is investigated. Possible network states are described; a non-standard state – the shutdown of the network has been identified. Two total resource thresholds, separating zones of different network behavior, have been found: the first threshold divides the zones of "insufficient" and "sufficient" resources, the second divides the zones of "sufficient small" and "sufficient large" resources. For each zone the functioning of the network is described and the asymptotic states and flows are investigated. The examples demonstrating numerical experiments are given for all typical situations.

Keywords: resource net, «greedy-vertices» model, graph dynamic threshold model.

УДК 519.1
ББК 22.176
DOI: 10.25728/ubs.2021.89.1

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким.

*Поступила в редакцию 17.11.2020.
Дата опубликования 31.01.2021.*