О СУЩЕСТВОВАНИИ СТАТИЧЕСКИХ РЕГУЛЯТОРОВ ПО ВЫХОДУ

Мухин А. В.[1]
(*Нижегородскийгосударственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород*)

Рассмотрена задача о существовании статических регуляторов по выходу для линейных непрерывных стационарных управляемых и наблюдаемых объектовв общем случае и дано ее решение. Очевидным преимуществом управления статической обратной связью по выходу по сравнению с управлением по состоянию является то, что для ее реализации не требуется измерять все переменные состояния. Не менее значимое преимущество перед управлением в форме линейного динамического регулятора состоит в том, что размерности замкнутого и исходного объектов равны. Показано, что с помощью приведения матриц входа и выхода к блочно-однородному виду исходное билинейное неравенство относительно матрицы квадратичной функции Ляпунова и матрицы регулятора можно представить в виде единой блочной симметрической матрицы. Благодаря этому удается сформулировать необходимые и достаточные условия существования статических регуляторов по выходу. В соответствии с представленной теоремой сделан вывод о том, что если матрицу объекта можно разбить на блоки таким образом, что хотя бы один из ее диагональных блоков является гурвицевым, то статический регулятор существует. Если это условие выполняется, то для существования статического регулятора по выходу необходимо и достаточно, чтобы существовал регулятор по состоянию для неустойчивогодиагонального блока матрицы объекта. Полученные результатыдают четкие критерии, по которым можно делать выводы относительно возможности статической стабилизации заданного линейного объекта. Представлены примеры, на которых продемонстрировано применение полученных результатов.

Ключевые слова: статический регулятор по выходу, гурвицева матрица, теорема Ляпунова, лемма Шура.

1. Введение

Одним из наиболее востребованных способов стабилизации линейных объектов, по ряду вполне понятных причин, является статическая обратная связь по выходу. В общем случае синтез таких регуляторов сводится либо к решению билинейного матричного неравенства относительно двух переменных, либо

[1] *Алексей Валерьевич Мухин, аспирант* (*muhin-aleksei@yandex.ru*).

к поиску двух взаимно-обратных положительно определенных матриц, удовлетворяющих системе линейных матричных неравенств. В обоих случаях задача представляется невыпуклой. Решению этой задачи посвящено большое количество публикаций. Не претендуя на полноту, укажем лишь некоторую часть из них (например, [9–12, 14]). Предложено большое количество различных алгоритмов, которые в ряде случаев оказываются успешными и могут применяться для решения самых разных практических задач. В частности, в статье [1] предложен алгоритм поиска двух взаимообратных матриц и доказана его сходимость. Обзорная работа [16], а также работы [12–14] содержат описание различных подходов и средств, применяемых для решения билинейных матричных неравенств. Отметим, что одной из первых обзорных работ, посвященных рассматриваемой тематике, является работа [17]. Более поздние результаты можно найти в [15]. Рассмотрены также различные частные случаи, для которых задача синтеза статических регуляторов по выходу может быть сведена к решению линейных матричных неравенств [6, 16]. Следует также указать работу [5], посвященную стабилизации неустойчивых объектов. Вместе с тем, насколько нам известно, в общем случае задача синтеза статических регуляторов по выходу является не решенной в смысле существования необходимых и достаточных условий, выражаемых в форме линейных матричных неравенств, таких как, например, для статического регулятора по состоянию. Кроме того, в общем случае не существует четких критериев относительно размерностей входа и выхода, по которым можно делать выводы о существовании статических регуляторов по выходу (см. например [8]). В качестве примера подобных критериев можно отметить ранговый критерий управляемости для существования регуляторов по состоянию.

В статье представлено решение задачи о существовании статических регуляторов по выходу. Показано, что если матрицу объекта можно представить в блочном виде с двумя диагональными квадратными блоками таким образом, что по крайней мере один из блоков будет гурвицевым, то для существования статического регулятора по выходу необходимо и достаточно, чтобы существовал статический регулятор по состоянию для неустойчивого блока матрицы.

Статья организована следующим образом. Второй раздел содержит постановку задачи. В третьем разделе представлено решение задачи на основе теоремы о существовании статического регулятора по выходу. Здесь также вводится понятие блочно-однородных матриц входа и выхода, играющих важную роль для основных результатов работы. Четвертый раздел содержит применение полученных результатов для статической стабилизации нескольких линейных объектов. Завершает основную часть статьи заключение.

2. Формулировка задачи

Рассмотрим задачу стабилизации линейного управляемого и наблюдаемого стационарного объекта с помощью статического регулятора по выходу. Дан неустойчивый объект вида

(1) $x = Ax + Bu,\ x(0) = x_0,$
$y = \mathrm{C}x,$

где $x \in R^n$ – вектор состояния объекта; $y \in R^p$ – измеряемый выход; $u \in R^m$ – вход; $A \in R^{n \times n}$ – матрица объекта; $B \in R^{n \times m}$ – матрица входа; $C \in R^{p \times n}$ – матрица выхода.

Для стабилизации (1) применим закон управления из класса статических обратных связей по выходу. Уравнение соответствующего регулятора имеет вид

(2) $u = Ky,$

где $K \in R^{m \times p}$ – матрица регулятора.

Уравнение состояния замкнутой системы (1) с учетом (2) примет замкнутый вид

(3) $x = Ax + BKCx.$

Запишем матрицу замкнутой системы

(4) $A_c = A + BKC.$

Без потери общности, ограничимразмерность выхода p следующимобразом:

(5) $m \leq p < n.$

Введенные ограничения не являются принципиальными, а напротив, вполне естественными и в большинстве практических задач выполняются. Если все же $m > p$, то выкладки будут аналогичными. Тогда задача заключается в том, чтобы определить необходимые и достаточные условия относительно размерностей входа m и выхода p, при которых существует статический регулятор по выходу, обеспечивающий асимптотическую устойчивость замкнутой системы с матрицей (4).

3. Решение задачи

Прежде чем переходить к решению задачи, приведем некоторые вспомогательные результаты, которые понадобятся в дальнейшем. Рассмотрим произвольную действительную матрицу линейного объекта

$$(6)\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Представим ее в блочном виде с квадратными диагональными блоками:

$$(7)\quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Докажем лемму:

Лемма 1. *Любую гурвицеву матрицу можно представить в блочном виде таким образом, что по крайней мере один из двух ее диагональных блоков будет гурвицевым, т.е.*

$$(8)\quad \exists i \in \{1 \le i \le 2\} \to \lambda_{max}(A_{ii} \in R^{k\times k}) < 0,$$

где $\lambda_{max}(A_{ii}) = \max\limits_{1\le j\le k}\left\{Re\lambda_j(A_{ii})\right\}$.

Доказательство. Пусть матрицаA вида (7) гурвицева. Значит, в соответствии с теоремой Ляпунова существует такая матрица $Y = Y^T > 0$, что выполняется следующее неравенство:

$$(9)\quad \Psi = AY + YA^T = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{12}^{\mathrm{T}} & \Psi_{22} \end{pmatrix} < 0,$$

где $Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^T & Y_{22} \end{pmatrix}$.

Блоки матрицы Ψ определяются следующим образом:

$$(10)\ \Psi_{11} = A_{11}Y_{11} + Y_{11}A_{11}^{\mathrm{T}} + A_{12}Y_{12}^{\mathrm{T}} + Y_{12}A_{12}^{\mathrm{T}},$$

$$(11)\ \Psi_{12} = A_{11}Y_{12} + A_{12}Y_{22} + Y_{11}A_{21}^{\mathrm{T}} + Y_{12}A_{22}^{\mathrm{T}},$$

$$(12)\ \Psi_{22} = A_{21}Y_{12} + Y_{12}^{\mathrm{T}}A_{21}^{\mathrm{T}} + A_{22}Y_{22} + Y_{22}A_{22}^{\mathrm{T}}.$$

Предположим обратное: ни один из блоков матрицы A не является гурвицевым. Для разрешимости неравенства (9) необходимо, чтобы выполнялись следующие неравенства:

(13) $A_{11}Y_{11} + Y_{11}A_{11}^{\mathrm{T}} + A_{12}Y_{12}^{\mathrm{T}} + Y_{12}A_{12}^{\mathrm{T}} < 0$,

(14) $A_{21}Y_{12} + Y_{12}^{\mathrm{T}}A_{21}^{\mathrm{T}} + A_{22}Y_{22} + Y_{22}A_{22}^{\mathrm{T}} < 0$,

где $Y_{ii} > 0$.

Поскольку матрица Y_{12} входит в оба неравенства, то обеспечить разрешимость обоих неравенств одновременно невозможно. Если, например, разрешимо неравенство (13), то разрешимость (14) будет определяться только матрицей Y_{22}. Но так как A_{22} не гурвицева, то обеспечить разрешимость (14) только одной матрицей Y_{22} невозможно. Следовательно, хотя бы один из диагональных блоков гурвицевой матрицы A должен быть гурвицевым. Лемма доказана.

Отметим, что если в матрице A выполняется условие (8), то это не гарантирует того, что матрица гурвицева, т.е. обратное утверждение не верно.

Рассмотрим второй вспомогательный результат, который в дальнейшем будет играть ключевую роль. Введем в рассмотрение блочно-однородные матрицы входа и выхода. Именно, матрицы B и C являются блочно-однородными, если они удовлетворяют следующим условиям:

(15) $B = \begin{pmatrix} 0_{(n-m)\times m} \\ B_m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_m \\ 0_{(n-m)\times m} \end{pmatrix}$,

(16) $C = \begin{pmatrix} C_p & 0_{p\times(n-p)} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0_{p\times(n-p)} & C_p \end{pmatrix}$,

где B_m иC_p – квадратные матрицы полного ранга.

Благодаря такому представлению, произведение матриц BKCв (4) можно представить в виде блочной матрицы, все блоки которой, за исключением одного, равного $K = B_mKC_p$, будут нулевыми. Понятно, что в общем случае матрицы входа и выхода являются произвольными и не являются блочно-однородными. Покажем, что с помощью линейных преобразований исходного объекта матрицы входа и выхода всегда могут быть получены в соответствии с (15) и (16). Для этого докажем следующую лемму:

Лемма 2. *В пространстве состояния объекта с матрицей А всегда можно выбрать такой базис, в котором матрицы входа и выхода будут иметь блочно-однородный вид.*

Доказательство. Будем считать, что относительно матриц входа и выхода возможны дванаиболее часто встречающихся на практике случая. В первом случае в управлении и измерении задействованы разные переменные состояния, т.е. $R^m \cap R^p = \varnothing$. Произведение матриц выхода и входа в таком случае всегда будет удовлетворять условию

(17) $CB = 0_{p\times m}$.

Это условие будет также выполняться, когда

(18) $B = \begin{pmatrix} 0_{(n-m)\times m} \\ B_m \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} C_p & 0_{p\times(n-p)} \end{pmatrix}$

либо

(19) $B = \begin{pmatrix} B_m \\ 0_{(n-m)\times m} \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 0_{p\times(n-p)} & C_p \end{pmatrix}$.

Во втором случае переменные, задействованные в управлении и измерении, частично или полностью совпадают. Произведение матриц выхода и входа в таком случае будет удовлетворять условию $CB \neq 0_{p\times m}$. Так как $p \geq m$, то произведение CB можно представить в виде следующей матрицы:

(20) $CB = C_p \begin{pmatrix} B_m \\ 0_{r\times m} \end{pmatrix}$,

где $r = p - m$.

Это условие будет также выполняться, если

(21) $B = \begin{pmatrix} 0_{(n-m)\times m} \\ B_m \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 0_{p\times(n-p)} & C_p \end{pmatrix}$,

а также если

(22) $B = \begin{pmatrix} B_m \\ 0_{(n-m)\times m} \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} C_p & 0_{p\times(n-p)} \end{pmatrix}$.

Для определенности докажем условие леммы для первого случая, т.е. когда в управлении и измерении задействованы разные переменные состояния. Для второго случая доказательство будет аналогичным. Пусть размерность объекта является нечетным числом, т.е.$n = 2k + 1, k \in Z$, и пусть $p = k + 1$ и $m = n - p$. Положим, что в измерении задействованы переменные, например, с нечетными индексами, т.е. если вектор состояния

$x^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2, x_3, \ldots\ x_n)$, то измеряемыми будут x_1,x_3,…, x_n. Выполним преобразование вектора x так, чтобы матрицы $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ удовлетворяли, например, (18). Для этого введем новый вектор состояния

(23) $x^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2, x_3, \ldots\ x_n)$.

Определим переменныевектора x через переменные x следующим образом:

(24) $x^{\mathrm{T}} = \left(x_1, x_3, \ldots, x_{2k+1}, \ldots, x_n, x_2, x_4, \ldots, x_{2l}, \ldots, x_{n-1}\right)$.

Тогда матрицы $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ в новом базисе будут удовлетворять виду (18). Выбранному базису соответствует линейное преобразование матрицы объекта вида $A = \boldsymbol{P}A\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$.Матрица $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}\{0{,}1\}$ обеспечивает перестановку строк в соответствии с новым вектором x. Причем для такой матрицы справедливо равенство $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}^{-1}$. В результате получим матрицу A с переставленными строками и столбцами. Отметим, что так как матрицы A и A являются подобными, то их спектры совпадают. Запишем исходный объект в новом базисе:

(25) $x = Ax + \boldsymbol{B}u,\ x(0) = x_0,$

$\quad y = \boldsymbol{C}x,$

где $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0_{(n-m)\times m} \\ \boldsymbol{B}_m \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_p & 0_{p\times(n-p)} \end{pmatrix}$.

Таким образом, если в управлении и измерении используются разные переменные состояния, то всегда можно выбрать такой базис, в котором матрицы входа и выхода будут блочно-однородными. Для второго случая, когда $\boldsymbol{R}^m \cap \boldsymbol{R}^p \neq \varnothing$, также можно выбрать линейное преобразование матрицы объекта таким образом, что матрицы $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ в новом базисе будут блочно-однородными в соответствии с(21) или (22). Лемма доказана.

Отметим, что обратное преобразование к исходному базису всегда существует. Далее докажем теорему, представляющую основной результат статьи:

Теорема (о существовании статического регулятора по выходу). *Статический регулятор по выходу для неустойчивого объекта с матрицей A существует тогда и только тогда, когда ее можно представить в блочном виде таким образом,* *что хотя бы один из двух диагональных блоков этой матрицы будет гурвицевым.*

Доказательство. Рассмотрим неустойчивую (не гурвицеву) матрицу A вида (7). Пусть один из блоков этой матрицы является гурвицевым. Для определенности будем считать, что таковым является блок $A_{22} \in R^{k\times k}(k < n)$. Будем считать, что в управлении и измерении задействованы частично одинаковые переменные, и потребуем, чтобы матрицы B и C удовлетворяли условиям

(26) $B = \begin{pmatrix} B_m \\ 0_{(n-m)\times m} \end{pmatrix}$,

(27) $C = \begin{pmatrix} C_p & 0_{p\times(n-p)} \end{pmatrix}$.

Получимпроизведение $BKC = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Так как матрицы B_m и C_p невырожденные, то уравнение $K = B_m K C_p$ всегда разрешимо относительно K. Поэтому будет считать, что $K = K$. Согласуем размерности блоков матрицы BKC с размерностью блоков матрицы A, подразумевая под ней $A = PAP^{\mathrm{T}}$. Пусть $p = n - k$. В силу того, что $m \le p$, то справедливо равенство $m + r = p$. Откуда имеем $n - m = k + r$. Получим следующую матрицу:

(28) $BKC = \begin{pmatrix} K_0 & 0_{p\times k} \\ 0_{k\times p} & 0_{k\times k} \end{pmatrix}$,

где $K_0 = \begin{pmatrix} K \\ 0_{r\times p} \end{pmatrix} \in R^{p\times p}$.

Матрица замкнутой системы, с учетом (28), будет равна

(29) $A_c = \begin{pmatrix} A_{11} + K_0 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$.

Применим теорему Ляпунова об устойчивости для матрицы A_c ипредставим получившееся билинейное неравенство в виде блочной матрицы

(30) $A_c Y + Y A_c^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{12}^{\mathrm{T}} & \Psi_{22} \end{pmatrix} < 0$,

где $Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^{\mathrm{T}} & Y_{22} \end{pmatrix} > 0$.

Блоки матрицы Ψ определяются следующим образом:

(31) $\Psi_{11} = A_{11}Y_{11} + Y_{11}A_{11}^{\mathrm{T}} + A_{12}Y_{12}^{\mathrm{T}} + Y_{12}A_{12}^{\mathrm{T}} + K_0Y_{11} + Y_{11}K_0^{\mathrm{T}}$,
(32) $\Psi_{12} = A_{11}Y_{12} + A_{12}Y_{22} + Y_{11}A_{21}^{\mathrm{T}} + Y_{12}A_{22}^{\mathrm{T}} + K_0Y_{12}$,
(33) $\Psi_{22} = A_{21}Y_{12} + Y_{12}^{\mathrm{T}}A_{21}^{\mathrm{T}} + A_{22}Y_{22} + Y_{22}A_{22}^{T}$,
где $Y_{ii} > 0$.

Для разрешимости (30) необходимо, чтобы выполнялись следующие неравенства:
(34) $\Psi_{ii} < 0,\ i = 1{,}2$.

Так как A_{22} гурвицева, то $\Psi_{22} < 0$ при любой Y_{12}. Положим, что $Y_{12} = 0_{p\times k}$. Неравенство $\Psi_{11} < 0$ в таком случае будет выполняться тогда и только тогда, когда матрица замкнутой системы $A_c^{11} = A_{11} + K_0$ является гурвицевой. Введем новую матрицу $B_{11} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}$ и перепишем матрицу A_c^{11} в виде
(35) $A_c^{11} = A_{11} + B_{11}K$.
Откуда следует, что для выполнения неравенства $\Psi_{11} < 0$ необходимо и достаточно, чтобы для матрицы A_c существовал статический регулятор по состоянию. Известно (см. например, [3], стр. 265), что для этого должно выполняться ранговое условие вида
(36) $\operatorname{rank}\left(B_{11} A_{11} B_{11} \dots .\ A_{11}^{p-1} B_{11}\right) = p$.
Если (36) выполняется, то пара (A_{11}, B_{11}) управляема. Считаем, что пара (A_{11}, B_{11}) управляема, и получаем, что необходимые условия разрешимости неравенства (30) выполняются. Тогда, в соответствии с леммой Шура [3, стр. 253], для разрешимости последнего необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее неравенство:
(37) $\Psi_{11}[Y_{11}, K] < \Psi_{12}\Psi_{22}^{-1}\Psi_{12}^{\mathrm{T}}[Y_{11}, Y_{22}]$.

Видим, что при заданной матрице Y_{11} разрешимость левой и правой частей (37) определяется матрицами K и $Y_{22} > 0$, которые можно варьировать независимо друг от друга. Значит, при некоторых матрицах $Y_{11} > 0$ и $Y_{22} > 0$ выбором матрицы регулятора K, расположенной только в левой части (37), можно получить такую матрицу $\Psi_{11}[K] < 0$, которая обеспечит разрешимость неравенства (37), а значит и исходного неравенства (30), что эквивалентно существованию статического регулятора по выходу. Пусть теперь ни один из двух блоков в исходной матрице A не является гурвицевым, т.е. $k = 0$. В соответствии с леммой 1 хотя бы один блок в устойчивой матрице должен быть гурвицевым. В рассматриваемом случае, когда матрица A_c удовлетворяет виду (29), условие леммы выполняется за счет верхнего диагонального блока, который можно стабилизировать матрицей K_0. Однако для стабилизации A_c одного устойчивого блока в данном случае недостаточно. Необходимо, чтобы блок A_{22} также был гурвицевым. Действительно, в соответствии с теоремой Гершгорина для блочных матриц [4, стр. 415], каждое собственное значение λ матрицыA_c принадлежит по крайней мере одной из областей

(38) $\left\|(A_{11} + K_0 - \lambda I)^{-1}\right\|^{-1} \leq \left\|A_{ij}\right\|$,

(39) $\left\|(A_{22} - \lambda I)^{-1}\right\|^{-1} \leq \left\|A_{ij}\right\|$,

где $i \neq j$.

Выбором матрицы K_0 можно обеспечить локализацию спектра матрицы $A_{11} + K_0$ в левой комплексной полуплоскости, так, что все области (38) будут расположены также в левой полуплоскости. Если при этом часть спектра матрицы A_{22} расположена в правой полуплоскости, т.е. $\lambda_{max}(A_{22}) > 0$, то изменяя только расположение спектра матрицы $A_{11} + K_0$ при заданных радиусах $\|A_{12}\|$ и $\|A_{21}\|$, обеспечить локализацию спектра всей матрицы A_c в левой комплексной полуплоскости в общем случае невозможно. Таким образом, нижний блок A_{22} в исходной матрице объекта должен быть гурвицевым. Так как $p = n - k$, то при $k = 0$ имеем $p = n$, т.е. статический регулятор по состоянию. Следовательно, если ни один из диагональных блоков в исходной матрице объекта не является гурвицевым, то стабилизация такой матрицы возможна только регулятором по состоянию. Теорема доказана.∎

Отметим, что размерности пространства измерения m для матриц A и A_{11}, вообще говоря, могут не совпадать. Поэтому размерность входа m в (36) должна соответствовать матрице A_{11}. Минимальное значение размерности выхода при этом равно размерности неустойчивого блока матрицы A. Это условие также можно записать в виде рангового соотношения

(40) $\min\{\operatorname{rank}(C)\} = n - k$.

На основании теоремы сформулируем следствие:

Следствие. *Если матрицу объекта можно представить в блочном виде таким образом, что хотя бы один из двух диагональных блоков этой матрицы будет гурвицевым, то для существования статического регулятора по выходу необходимо и достаточно, чтобы существовал статический регулятор по состоянию для неустойчивого блока матрицы объекта, варьируя который можно обеспечить устойчивость замкнутой системы.*

4. Примеры

Рассмотрим три неустойчивых линейных объекта: электромагнитный подвес, ротор в электромагнитных подшипниках, а также двухзвенный перевернутый маятник. Применим полученные результаты для решения задачи статической стабилизации по выходу указанных объектов.

Матрица A, описывающая систему уравнений электромагнитного подвеса, имеет вид [2]

(41) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -7{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$,

где $A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -7{,}5 \end{pmatrix}$.

Поскольку нижний блок A_{22} является гурвицевым, то максимальная размерность устойчивого диагонального блока $k = 2$. Следовательно, минимальная размерность выхода будет равна $p = n - k = 1$. Это означает, что при правильном выборе матриц входа и выхода замкнутый объект должен быть асимптотически устойчивым. Действительно, если задать матрицы B и C в виде

(42) $B^{\mathrm{T}} = (1 \quad 0 \quad 0)$,

(43) $C = B^{\mathrm{T}}$,

то матрица замкнутой системы может быть гурвицевой. Представим ее в виде

(44) $A_c = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -7{,}5 \end{pmatrix}$.

При $k > 7{,}5$ получаем гурвицеву матрицу A_c. Если матрица $\boldsymbol{B}$ имеет отличный от (42) вид, то значение p будет другим. Если $\boldsymbol{B} = (0 \quad 0 \quad 1)^{\mathrm{T}}$, то задача решается при $p = 2$.

Рассмотрим второй объект, описывающий вращение вертикального жесткого ротора в электромагнитных подшипниках. Матрицу объекта можно представить в блочном виде [7]

(45) $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^{12\times 12}$.

Нижний диагональный блок $A_{22} \in \boldsymbol{R}^{4\times 4}$ является отрицательно определенным и поэтому гурвицев. Значит, размерность неустойчивого диагонального блока A_{11} равна 8. Следовательно, минимальная размерность выхода должна быть равной $p = 8$. Значение входа, при котором пара $(A_{11}, \boldsymbol{B}_{11})$ является управляемой, равно $m = 4$. Отметим, что для матрицы A это значение составляет $m = 1$. Применив алгоритм поиска двух взаимообратных матриц [1] для решения матричного неравенства в форме (30), убеждаемся, что при выборе матриц входа и выхода в виде

(46) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m \\ 0_{(n-m)\times m} \end{pmatrix}$,

(47) $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_p 0_{p\times(n-p)} \end{pmatrix}$

задача разрешима и замкнутый объект оказывается асимптотически устойчивым.

Рассмотрим последний объект – двухзвенный перевернутый маятник. Матрица объекта равна [3, стр. 49]

(48) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Видно, что устойчивое подпространство для такой матрицы не существует, т.е. $k = 0$. Следовательно, $p = n = 4$. Это означает, что статическая стабилизация по выходу такого объекта невозможна. Для стабилизации такого объекта можно синтезировать статический регулятор только по состоянию.

5. Заключение

На основании полученных результатов можно заключить, что критерием существования статического регулятора по выходу для линейного управляемого и наблюдаемого объекта является существование устойчивого диагонального блока матрицы объекта. Если матрицу объекта удается разбить на блоки таким образом, что хотя бы один из двух диагональных блоков является гурвицевым, что статический регулятор по выходу существует. Минимальная размерность выхода в этом случае будет равна размерности неустойчивого подпространства. Размерность входа определяется из рангового условия управляемости неустойчивого матричного блока. Приведенные результаты представляют новизну и позволяют существенно облегчитьпоиск статических регуляторов по выходу, так как дают четкие значения размерностей входа и выхода, при которых задача будет разрешимой.

Автор благодарит профессора кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Д.В. Баландина за обсуждение результатов, а также за ценные и полезные замечания.

Литература

1. БАЛАНДИН Д.В., КОГАН М.М. *Синтез регуляторов на основе решения линейных матричных неравенств и алгоритма поиска взаимно-обратных матриц* // Автоматика и телемеханика. – 2005. – №1. – С. 82–99.
2. БАЛАНДИН Д.В., БИРЮКОВ Р.С., КОГАН М.М., ФЕДЮКОВ А.А. *Оптимальная стабилизация тела в электромагнитном подвесе без изменения его положения*// Известия РАН. ТиСУ. – 2017. – №3. – С. 12–24.
3. БАЛАНДИН Д.В., КОГАН М.М. *Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств*. – М.: Физматлит, 2007. – 281 с.
4. ГАНТМАХЕР Ф.Р. *Теория матриц*. – М.: Наука, 1987.
5. ГРИШИН А.А., ЛЕНСКИЙ А.В., ОХОЦИМСКИЙ Д.Е., ПАНИН Д.А., ФОРМАЛЬСКИЙ А.М. *О синтезе управления*

неустойчивым объектом. Перевернутый маятник // Известия РАН. ТиСУ. – 2002. – №5. – С. 14–24.
6. МУХИН А.В. *Синтез статических регуляторов на основе решения линейных матричных неравенств* // Управление большими системами. – 2021. – Вып. 92. – С. 38–42.
7. МУХИН А.В. *Математическое моделирование процесса стабилизации жесткого ротора, вращающего в электромагнитных подшипниках* // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. – 2021. – №2. – С. 36–48.
8. ШУМАФОВ М.М. *Стабилизация линейных систем управления. Проблема назначения полюсов. Обзор* // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. – 2019. – Т. 6(64), Вып. 4. – С.564–591.
9. ASTOLFI A., COLANERI P. *Staticoutput feedback stabilization of linear and nonlinear systems* // 39th Conf. on Decision and Control, Sydney, Australia, 2000.
10. ASTOLFI A., COLANERI P.*An algebraic characterization for the static output feedback stabilization problem* // American Control Conference, Arlington, VA, 2001. –P. 1408–1413.
11. CAO Y.-Y., LAM J.,SUN Y.-X. *Static output feedback stabilization: an ILMI approach* // Automatica. – 1998. –Vol. 34. – P. 1641–1645.
12. EL GHAOUI L.,OUSTRY F., AITRAMI M. *A cone complementaritylinearization algorithm for static output-feedback and related problems* //IEEE Trans.on Automatic Control. – 1997. – Vol. 42. –P. 1171–1176.
13. HASSIBI A., HOW J., BOYD S. *A path following method for solving BMI problems in control* // Proc.of American Control Conference. – 1999. –Vol. 2. –P. 1385–1389.
14. HENRION D., LOEFBERG J., KOCVARA M., STINGL M. *Solving polynomial static output feedback problems with PENBMI* // Proc. Joint IEEE Conf. Decision Control and Europ. Control Conf., Sevilla, Spain,2005.
15. RÖBENACK K., VOSWINKEL R., FRANKE MIRCO, FRANKE MATTHIAS. *Stabilization by static output feedback: a quantifier elimination approach* // Proc. Int. Conf. Syst. Theory, Control, Computing (ICSTCC 2018), Sinaia, Romania, 2018.

16. SADABADI M. S., PEAUCELLE D. *From static output feedback to structured robust static output feedback: A survey* // Annual Reviews in Control. – 2016. –Vol. 42. –P. 11–26.
17. SYRMOS V.L, ABDALLAH C.T., DORATO P., GRIGORIADIS K. *Static Output Feedback. A Survey* // Automatica. – 1997. –Vol.33, №. 2. –P. 125–137.

ABOUT STATIC OUTPUT CONTROLLER EXISTING

Aleksey Mukhin, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod, postgraduate student (myhin-aleksey@yandex.ru).

Abstract: The problem of the existence of static output controllers for linear time-invariant continuous-time controlled and observed plants in the general case is considered and its solution is given. The obvious advantage of static output feedback control over state control is that it does not require measuring all state variables to implement it. An equally significant advantage over the control in the form of a linear dynamic controller is that the dimensions of the closed-loop and initial plants are equal. It is shown that by reducing the input and output matrices to a block-homogeneous form, the initial bilinear inequality with respect to the matrix of the Lyapunov quadratic function and the controller matrix can be represented as a single block symmetric matrix. Thanks to this, it is possible to formulate the necessary and sufficient conditions for the existence of static output feedback. In accordance with the presented theorem, it is concluded that if the matrix of an object can be divided into blocks in such a way that at least one of its diagonal blocks was Hurwitz, then a static regulator exists. If this condition is met, then for the existence of a static output controller, it is necessary and sufficient that there is a state controller for an unstable diagonal block of the object matrix. The obtained results allow us to formulate criteria by which conclusions can be drawn regarding the possibility of static stabilization of a given linear object. Examples are presented, which demonstrate the application of the results obtained.

Keywords: static output feedback, Hurwitz’smatrix, Lyapunov’s theorem, Schur’s lemma.

УДК 517.977
ББК 22.18
DOI: 10.25728/ubs.2022.96.2

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 28.11.2021.
Опубликована 31.03.2022.