ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СКЛЕИВАНИЯ ДЛЯ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА РЕГЕНЕРИРУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ В ТМО И В СМЕЖНЫХ ЗАДАЧАХ[1]

Зверкина Г. А.[2], **Фархадов М. П.**[3]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

В теории массового обслуживания (ТМО) и в смежных задачах важно знать числовые характеристики рассматриваемой системы как в стационарном, так и в достационарном режиме. Иногда они могут быть вычислены, но это возможно не для всех моделей. Но часто возможно вычисление или оценка стационарных значений характеристик исследуемых моделей. Если известна скорость сходимости (или оценка сверху скорости сходимости) некой характеристики к стационарному значению, то можно оценивать её значение в любой момент времени. При этом поведение многих процессов в ТМО и в смежных задачах описывается линейчатыми марковскими процессами, часто являющимися регенерирующими марковскими процессами (РМП). Если период регенерации РМП имеет конечное среднее значение, то РМП эргодичен. Для получения оценок сверху для скорости сходимости распределения регенерирующих марковских процессов (РМП) к стационарному распределению может применяться метод склеивания. Цель статьи – показать применение метода склеивания. Данная статья является небольшим обзором активно развивающихся сейчас методов получения строгих оценок скорости сходимости распределения регенерирующих процессов и восполняет собой имеющуюся лакуну в отечественной литературе.

Ключевые слова: теория массового обслуживания; регенерирующие марковские процессы; метод склеивания для кусочно-линейных марковских процессов; метрика полной вариации.

Введение

В теории массового обслуживания (ТМО) и в смежных задачах очень важно знать числовые характеристики рассматриваемой системы – как в стационарном, так и в достационарном

[1] *Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант №20-01-00575.*

[2] *Галина Александровна Зверкина, к.ф.-м.н., доцент* (*zverkina@gmail.com*).

[3] *Маис Паша-оглы Фархадов, д.т.н., с.н.с.* (*mais@ipu.ru*).

режиме. В ряде случаев такие характеристики могут быть вычислены, но это возможно для ограниченного количества реальных моделей. Однако в большинстве случаев возможно вычисление или оценка стационарных значений характеристик исследуемых моделей. Поведение подавляющего количества систем массового обслуживания (СМО), систем надёжности и сетей массового обслуживания (СеМО) может быть описано с помощью линейчатых марковских процессов, которые во многих случаях являются регенерирующими. В том случае, когда период регенерации марковского процесса имеет конечное среднее значение, этот процесс эргодичен. Метод склеивания может применяться для получения строгих оценок сверху для скорости сходимости распределения регенерирующих марковских процессов (РМП) к стационарному распределению (естественно, в тех случаях, когда рассматриваемый РМП эргодичен). Этот метод может применяться к анализу систем массового обслуживания, сетей массового обслуживания и систем надёжности.

К сожалению, в отечественной литературе практически нет информации о методе склеивания (см., например, [1, 5]), хотя отечественные учёные использовали этот метод ([9] и др.).

1. Кусочно-линейные марковские процессы (КЛМП)

Поведение систем массового обслуживания (СМО), сетей массового обслуживания (СеМО) и систем надёжности определяется, как правило, последовательностями случайных величин (сл.в.), представляющих собой времена работы или обслуживания требований (восстанавливаемых элементов или узлов СеМО), интервалы между поступлениями требований в исследуемую систему, случайные времена ожидания обслуживания (в случае «нетерпеливых» требований) и пр.

Такого сорта поведение технических систем принято описывать кусочно-линейными (или линейчатыми) процессами, введёнными в [4].

Следуя [4], определим кусочно-линейный марковский процесс следующим образом.

Кусочно-линейным марковским процессом называется случайный процесс $X_t = (\nu(t), \vec{v}(t))$, определяемый следующим образом. Пространство состояний процесса $\mathcal{X}$ – это множество пар $\left(i, \vec{\xi_i}\right)$, где i – элемент конечного или счётного пространства, а $\vec{v}_i$ – вектор $= (v_1, \ldots v_{|i|})$, где $|i| \geqslant 0$ является «размером» базового состояния i; $v_j \geqslant O$. Поведение процесса X_t описывается так.

Пусть $X_t = (i, \vec{y})$, $\vec{y} = (y_l, \ldots y_{|i|})$. Тогда с вероятностью $\lambda_i(X_t) \times p_{ij}(X_t)\,\mathrm{d}t$ за время $\mathrm{d}t$ произойдёт случайный переход X_t в базовое состояние j. После перехода в состояние j новое значение компоненты $\vec{v}(t)$ случайно и определяется измеримой по $\vec{y}$ функцией распределения (ф.р.)

$$B_{ij}^{(0)}(\vec{x}|\vec{y}) = \mathbf{P}\{\vec{v}(t+\,\mathrm{d}t) < \vec{x}|\vec{v}(t) = \vec{y},\, \nu(t) = i,\, \nu(t+\,\mathrm{d}t) = j\}$$

Вероятность того, что за малое время h произойдёт более одного случайного перехода, есть $o(h)$. При этом если $\nu(t+\,\mathrm{d}t) = \nu(t)$, то $\vec{v}(t+\,\mathrm{d}t) = \vec{v}(t) + \vec{\alpha}_i\,\mathrm{d}t$, где $\vec{\alpha}_i = (\alpha_{il}, \ldots, \alpha_{i|i|})$ – вектор с неотрицательными компонентами, если на интервале $(t, t+\,\mathrm{d}t)$ не было случайных переходов (см. [4]).

Для СМО номер i может обозначать количество находящихся в СМО требований, а вектор $\vec{v}$ состоит из времени, прошедшего со времени прихода последнего требования, а также из времён пребывания имеющихся требований с СМО (или стоимость уже проведённых работ по их обслуживанию и пр.).

В СеМО i может нумеровать все возможные состояния СеМО (количество требований в каждом узле и в очередях на этих узлах), а вектор $\vec{v}$ может характеризовать состояние (прошедшее время обслуживания или ожидания обслуживания) находящихся на обслуживании на каждом узле требований.

Таких вариантов описания моделей ТМО и смежных задач множество.

Отметим, что в случае, когда $\lambda(X_t) \equiv \lambda(\nu_t)$ и $p_{ij}(X_t) \equiv p(i,j)$, процесс X_t представляет собой цепь Маркова в непрерывном времени (см. [4, 6]).

1.1. Вложенная цепь Маркова

КЛМП имеет вложенную неоднородную цепь Маркова – с вероятностями перехода $p_{ij}(X(t))$ (обычно рассматривается случай, когда $p_{ij}(X(t)) \equiv p(i,j) = \text{const}$).

Мы предполагаем, что эта марковская цепь неприводима и положительно возвратна. При этом $\lambda_i(X_t)$ – это интенсивность окончания времени пребывания в текущем состоянии $\nu(t) = i$. Как уже говорилось, в случае, если $\lambda_i(X_t) \equiv \lambda(\nu(t))$, КЛМП – это цепь Маркова в непрерывном времени.

Хорошо известно, что поведение цепи Маркова в непрерывном времени описывается уравнениями Колмогорова.

Если среднее время пребывания во всех состояниях цепи Маркова конечно, что соответствующий КЛМП эргодичен (см. [6]).

2. Регенерирующие процессы

Поведение большинства изучаемых СМО, СеМО и систем надёжности описывается регенерирующими процессами.

Определение 1 (регенерирующего процесса). *Процесс* $(X_t,\, t \geqslant 0)$*, заданный на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$*, с измеримым пространством состояний* $(\mathscr{X}, \mathscr{B}(\mathscr{X}))$ *называется регенерирующим, если существует возрастающая последовательность* $\{\theta_n\}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ *марковских моментов по отношению к фильтрации* $\mathscr{F}_{t\leqslant 0}$ *таких, что последовательность*

$$\{\Theta_n\} = \left\{B_{t+\theta_{n-1}} - B_{\theta_{n-1}}, \theta_n - \theta_{n-1}, t \in [\theta_{n-1}, \theta_n)\right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

состоит из независимых одинаково распределённых (н.о.р.) случайных элементов, заданных на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$*. Если* $\theta_0 \neq 0$*, то регенерирующий процесс* $(X_t,\, t \geqslant 0)$ *называется процессом с запаздыванием. Моменты* $\{\theta_n\}$ *называются моментами (точками) регенерации.* ▷

Обозначим $\xi_n \stackrel{\text{def}}{=} \theta_n - \theta_{n-1}$, и пусть $F(s) = \mathbf{P}\{\xi_n \leqslant s\}$ – ф.р. длины периода регенерации; везде далее мы предполагаем, что распределение F нерешётчато и, более того, для простоты будем считать, почти всюду при $t > 0$ существует положительная плотность распределения.

В ТМО моментами регенерации обычно являются моменты начала периода занятости (при экспоненциальном входящем потоке это могут быть и моменты окончания периодов занятости). В теории надёжности при анализе поведения одного восстанавливаемого элемента точки регенерации – это моменты отказов или восстановлений. При анализе СеМО с экспоненциальными распределениями времени пребывания требований в узлах СеМО и входящих экспоненциальных потоках КЛМП представляет собой цепь Маркова в непрерывном времени; в этом случае в качестве точки регенерации можно выбрать любое возвратное базовое состояние.

2.1. Наша цель

Пусть $\mathscr{P}_t$ – распределение КЛМП $(X_t,\, t \geqslant 0)$ в момент времени t.

Если $\mathbb{E}\,\xi_n < \infty$, то существует и единственно стационарное инвариантное распределение $\mathscr{P}$ такое, что $\mathscr{P}_t \Longrightarrow \mathscr{P}$.

Наша цель – вычисление строгой оценки сверху для скорости сходимости $\mathscr{P}_t \Longrightarrow \mathscr{P}$.

Для этого будет использован метод склеивания марковских процессов, т.е. исследуемые регенерирующие процессы $(X_t,\, t \geqslant\, 0)$ должны быть марковскими. Если процесс $(X_t,\, t \geqslant 0)$ не является марковским, то можно расширить пространство его состояний $\mathscr{X}$ таким образом, что на новом (расширенном) пространстве состояний $\overline{\mathscr{X}}$ «уточнённый» процесс $\left(\overline{X}_t,\, t \geqslant 0\right)$ окажется марковским.

Например, в состояние регенерирующего процесса X_t, $t \in [\theta_{n-1}, \theta_n)$ можно включить полную историю этого процесса на интервале $[\theta_{n-1}, t]$: процесс $\overline{X}_t \stackrel{\text{def}}{=} \{X_s, s \in [\theta_{n-1}, t] | t < \theta_n\}$ – марковский и регенерирующий на расширенном пространстве состояний $\overline{\mathscr{X}}$.

2.2. Что уже известно о регенерирующих процессах (см. [2])

Теорема 1. *Если для некоторого* $\alpha > 0$ *выполнено условие* $\mathbf{E}\, e^{\alpha\xi} < \infty$, *то для любого* $\beta < \alpha$ *существует постоянная* $C(\beta)$ *такая, что для всех* $A \in \sigma(\mathscr{X})$ *и всех* $t > 0$ *верно:*

$$|\mathscr{P}_t(A) - \mathscr{P}(A)| < C(\beta) \exp(-\beta t). \qquad \square$$

Оценки для постоянной $C(\beta)$ неизвестны.

Теорема 2. *Если для некоторого* $k > 1$ *выполнено условие* $\mathbf{E}\, \xi^k < \infty$, *то для любого* $\kappa \leqslant k - 1$ *существует постоянная* $C(\kappa)$ *такая, что*

$$|\mathscr{P}_t(A) - \mathscr{P}(A)| < C(\kappa) t^{-\kappa}. \qquad \square$$

Оценки для постоянной $C(k)$ неизвестны.

2.3. Вложенный процесс восстановления

Рассмотрим регенерирующий процесс X_t. Этот процесс имеет вложенный процесс восстановления N_t

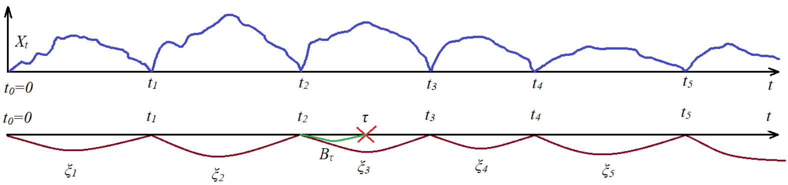

Рис. 1. Регенерирующий процесс X_t *и вложенный процесс восстановления*

Распределение процесса X_τ – это функция от значения случайной величины B_τ – обратного времени восстановления.

Значит, если известны оценки скорости сходимости распределения обратного времени восстановления процесса восстановления N_t, то известны оценки скорости сходимости распределение регенерирующего процесса X_t.

2.4. Процесс восстановления и неравенство Лордена

Рассмотрим процесс восстановления

$$N_t \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}\left\{\sum_{s=1}^{i} \xi_k \leqslant t\right\},$$

где $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ – н.о.р. положительные случайные величины (сл.в.) с ф.р. $F(s)$. N_t – это считающий процесс, который меняет своё значение в моменты времени $t_k = S_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{j=1}^{s} \xi_j$. Моменты t_k называются моментами восстановления.

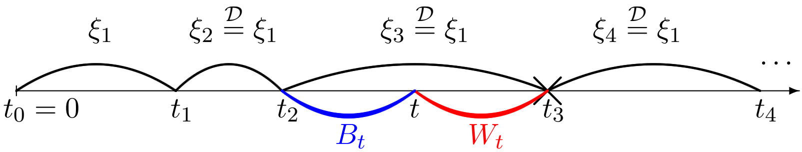

Рис. 2. B_t – перескок, W_t – недоскок в момент времени t (*см.* [4, 7])

На рис. 2 показаны обратное время восстановления или перескок B_t и прямое время восстановления или недоскок W_t в **фиксированный** момент времени t: $B_t \stackrel{\text{def}}{=} t - S_{N_t}$; $W_t \stackrel{\text{def}}{=} S_{N_t+1} - t$.

Напомним, что в если $F(s)$ нерешётчата и конечно $\mathbb{E}\,\xi_i$, то предельное распределение величины перескока и недоскока при $t \to \infty$ таково:

$$\tilde{F}(s) = 1 - \frac{\int\limits_0^s (1 - F(u))\mathrm{d}u}{\int\limits_0^\infty (1 - F(u))\mathrm{d}u} = 1 - \frac{\int\limits_0^s (1 - F(u))\mathrm{d}u}{\mathbb{E}\xi}$$

— см. [7].

Теорема 3 Г. Лордена (см. [12])**.** *Неравенство Лордена даёт оценку сверху математического ожидания (м.о.) перескока:*

$$\mathbb{E}\,B_t \leqslant \frac{\mathbb{E}\,\xi^2}{\mathbb{E}\,\xi} \stackrel{\text{def}}{=} \Xi\big(= \textit{функционал от } F(s)\big). \qquad \square$$

Это неравенство будет использовано для получения оценки сверху для скорости сходимости распределения перескока к стационарному распределению в метрике полной вариации.

Напомним, что

$$\mathbf{P}\left\{\begin{matrix}\text{имеется хотя бы одно восстановление}\\ \text{на интервале } [t, t+\Delta]\end{matrix}\middle| B_t = y\right\} =$$

$$= \frac{F(y+\Delta) - F(y)}{1 - F(y)} = \int\limits_{y}^{y+\Delta} \lambda(s)\,\mathrm{d}s = \lambda(y)\Delta + o(\Delta),$$

где

$$\lambda(t) = \frac{F'(t)}{1 - F(t)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(-\ln(1 - F(t))\Big), \tag{1}$$

и $\lambda(t)$ называется <u>интенсивностью</u> <u>(процесса)</u> <u>восстановления</u>[1].

При этом

$$F(s) = 1 - \exp\left(\int\limits_0^s (-\lambda(u))\,\mathrm{d}u\right), \tag{2}$$

$$F'(s) = \lambda(s)\exp\left(\int\limits_0^s (-\lambda(u))\,\mathrm{d}u\right).$$

***<u>Замечание</u>* 1.** Обычно предполагается, что распределение $F(s)$ абсолютно непрерывно. Однако в некоторых приложениях теории восстановления ф.р. распределение сл.в. ξ_i не абсолютно непрерывно.

То есть ф.р. сл.в. ξ_i может иметь скачки (естественно, в прикладных задачах теории вероятностей мы не рассматриваем сингулярные сл.в.).

Положим $f(s) = \begin{cases} F'(s), & \text{если } F'(s) \text{ существует;}\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$

[1] *В теории надёжности эта величина часто называется «опасностью отказа» (hazard rate function).*

В дальнейшем полагаем

$$\lambda(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(s)}{1-F(s)} - \sum_i \delta(s-a_i)\ln(F(a_i+0)-F(a_i-0)),$$

где $\{a_i\}$ – множество точек разрыва $F(s)$. Такое определение интенсивности оставляет в силе первую формулу в (2) – это следует из (1). ▷

Заметим, что процесс B_t – это простейший марковский КЛМП или линейчатый процесс (см. [4]).

3. Метод склеивания (марковских процессов)

Применение метода склеивания (см., например, [11]) основано на следующем соображении.

***Замечание* 2.** Если два однородных независимых марковских процесса с одними и теми же переходными вероятностями, но с разными начальными условиями, совпадут в некоторый момент τ, то после этого момента τ их распределения совпадают. ▷

Момент τ называется временем (моментом) склеивания, или склейкой.

Напомним, что процесс X_t с пространством состояний $\mathcal{X}$ называется марковским, если для него выполнено марковское свойство: для любых $A_0, A_1, \ldots, A_n \in \sigma(\mathcal{X})$, $\forall t_1, t_2, \ldots, t_n, t$: $0 \leqslant t_i < t_{i+1} < t$ верно равенство:

$$\mathbf{P}\{X_t \in A_0 | X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} \in A_2, \ldots, X_{t_n} \in A_n\} = \mathbf{P}\{X_t \in A_0 | X_{t_n} \in A_n\},$$

т.е. поведение процесса после момента t_n зависит только от его состояния в момент t_n и не зависит от того, что было раньше.

Пусть теперь два независимых марковских процесса X_t и X'_t имеют одинаковые переходные вероятности:

$$\mathbf{P}\{X_{t+\theta} \in A | X_t \in B\} \equiv \mathbf{P}\{X'_{s+\theta} \in A | X'_s \in B\}$$

для всех $\theta > 0$ и $t \geqslant 0$, $s \geqslant 0$, при этом $X_0 \neq X'_0$. И пусть известно, что в некоторый момент времени τ эти процессы совпали:

$X_\tau = X'_\tau = \mathfrak{X}$. Тогда, в соответствии с переходной функцией и марковским свойством, для всех $t = \tau + s > \tau$ и $A \in \sigma(\mathcal{X})$ выполняется:

$$\mathbf{P}\{X_t \in A\} = \mathbf{P}\{X_t \in A | X_\tau = \mathfrak{X}\} = \\ = \mathbf{P}\{X'_t \in A | X'_\tau = \mathfrak{X}\} = \mathbf{P}\{X'_t \in A\}.$$

Если известно распределение (или оценка распределения) момента склеивания τ (эта величина, вообще говоря, зависит от начальных условий процессов X_t и X'_t), то выписывается <u>основное</u> <u>неравенство</u> <u>склеивания</u>:

(3) $$|\mathbf{P}\{X_t \in S\} - \mathbf{P}\{X'_t \in S\}| = \\ = |\mathbf{P}\{X_t \in S\} - \mathbf{P}\{X'_t \in S\}| \times (\mathbf{1}(\tau > t) + \mathbf{1}(\tau \leqslant t)) \leqslant \mathbf{P}\{\tau > t\},$$

где $\mathbf{1}(\cdot)$ обозначает индикатор события.

Процессы $(X_t,\, t \geqslant 0)$ и $(X'_t,\, t \geqslant 0)$ имеют распределения $\mathscr{P}_t(A) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}\left\{X_t \in A\right\}$, и $\mathscr{P}'_t(A) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}\left\{X'_t \in A\right\}$ соответственно.

Обозначим $\tau\left(X_0, X'_0\right) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\left\{t > 0 :\ X_t = X'_t\right\}$. Предположим, что для некоторой положительной возрастающей функции $\varphi(t)$ вычислена или оценена сверху величина $\mathbb{E}\,\varphi\left(\tau\left(X_0, X'_0\right)\right) = C\left(X_0, X'_0\right) < \infty$. Подставим эту функцию в последнее выражение (3) и применим неравенство Маркова:

$$\left|\mathscr{P}_t(A) - \mathscr{P}'_t(A)\right| \leqslant \mathbf{P}\left\{\tau\left(X_0, X'_0\right) > t\right\} = \\ = \mathbf{P}\left\{\varphi\left(\tau\left(X_0, X'_0\right)\right) > \varphi(t)\right\} \leqslant \\ \leqslant \left|\mathscr{P}_t(A) - \mathscr{P}'_t(A)\right| \leqslant \frac{\mathbf{E}\,\varphi\left(\tau\left(X_0, X'_0\right)\right)}{\varphi(t)}.$$

Если известна оценка стационарного распределения $\mathscr{P}$ процесса X_t (и X'_t – это одно и то же), то последнее неравенство можно проинтегрировать по стационарной мере $\mathscr{P}$, и тогда получаем

$$|\mathscr{P}_t(A) - \mathscr{P}(A)| \leqslant \\ \leqslant (\varphi(t))^{-1} \underbrace{\int\limits_{\mathscr{X}} \varphi\left(\tau\left(X_0, X'_0\right)\right)\,\mathrm{d}\,\mathscr{P}\left(X'_0\right)}_{\widehat{C}(X_0)} = \frac{\widehat{C}\left(X_0\right)}{\varphi(t)},$$

т.е.

$$\left\| \mathscr{P}_t^{X_0} - \mathscr{P} \right\|_{\text{ПВ}} \leqslant \frac{\widehat{C}\left(X_0\right)}{\varphi(t)}.$$

Напомним определение метрики полной вариации.

Определение 2. *Расстояние в метрике полной вариации между двумя вероятностными мерами $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ на σ-алгебре $\mathscr{F}$ подмножеств вероятностного пространства Ω определяется как*

$$\delta(\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2) = \|\mathscr{P}_1 - \mathscr{P}_2\|_{\mathit{ПВ}} = \sup_{A \in \mathscr{F}} |\mathscr{P}_1(A) - \mathscr{P}_2(A)|. \qquad \triangleright$$

Замечание 3. Метод склеивания впервые был предложен в 1938 г. молодым французским математиком немецкого происхождения В. Доблином (V. Doblin, или W. Doeblin) для обычных цепей Маркова. К сожалению, в отечественной учебной литературе практически нет информации об этом методе. Он упоминается в «Дополнении» в пособии [3]; см. также [11].

Для процессов с непрерывным временем применение метода склеивания «напрямую» невозможно, поскольку должны совпасть непрерывные сл.в., а вероятность такого совпадения равна нулю.

То есть в общем случае для процессов в непрерывном времени

$$\mathbf{P}\left\{\tau\left(X_0, X_0'\right) < \infty\right\} < 1,$$

и стандартное применение метода склеивания невозможно. Поэтому применяется процедура конструирования параллельного склеивания. $\triangleright$

3.1. Параллельное склеивание (“Successful coupling” [8])

Для оценки скорости сходимости друг к другу распределений двух независимых однородных марковских процессов $(X_t,\, t \geqslant 0)$ и $(X_t',\, t \geqslant 0)$ с одинаковыми переходными функциями конструируется (на специально выбранном вероятностном пространстве) парный случайный процесс $\mathscr{Z}_t = ((Z_t, Z'_t), t \geqslant 0)$ такой, что:

1. Для всех $t \geqslant 0$ сл.в. X_t и Z_t имеют одинаковое распределение, также как и пара X'_t и Z'_t. Иначе говоря, маргинальные распределения процессов X_t и Z_t (или X'_t и Z'_t) совпадают – но это не значит, что совпадают конечномерные распределения у этих пар процессов.

2. $\mathbf{E}\,\tau(Z_0, Z'_0) < \infty$, где

$$\tau\left(Z_0, Z'_0\right) = \tau(\mathscr{Z}_0) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \inf\left\{t \leqslant 0 :\, Z_t = Z'_t\right\} \; -$$

момент склеивания процессов Z_0 и Z'_0.

3. $Z_t = Z'_t$ для всех $t \geqslant \tau(Z_0, Z'_0)$.

<u>Определение</u> 3. *Парный случайный процесс $\mathscr{Z}_t = ((Z_t, Z'_t), t \geqslant 0)$, удовлетворяющий условиям 1–3, называется <u>параллельным склеиванием</u>, а момент τ называется <u>успешной склейкой</u>.* $\triangleright$

<u>Замечание 4.</u> Повторимся, что конечномерные распределения процессов $\left(Z_t^{(i)}, \, t \geqslant 0\right)$ могут отличаться от конечномерных распределений процессов $\left(X_t^{(i)}, \, t \geqslant 0\right)$; более того, при конструировании параллельного склеивания процессы Z_t и Z'_t, как правило, зависимы. $\triangleright$

Для всех $A \in \mathscr{B}(\mathscr{X})$ основное неравенство склеивания (3) переписывается так:

$$\text{(4)} \quad \left|\mathscr{P}_t^{X_0}(A) - \mathscr{P}_t^{X'_0}(A)\right| = \left|\mathbf{P}\left\{X_t \in A\right\} - \mathbf{P}\left\{X'_t \in A\right\}\right| =$$

$$= \left|\mathbf{P}\left\{Z_t \in A\right\} - \mathbf{P}\left\{Z'_t \in A\right\}\right| \leqslant \mathbf{P}\left\{\tau\left(Z_0, Z'_0\right) \geqslant t\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mathbf{E}\,\varphi\left(\tau\left(Z_0, Z'_0\right)\right)}{\varphi(t)} \leqslant \frac{C\left(Z_0, Z'_0\right)}{\varphi(t)},$$

где значение $C(Z_0, Z'_0)$ вычисляется по начальным условиям процесса $\mathscr{Z}_t$.

Но $Z_0 = X_0$ и $Z'_0 = X'_0$, и поэтому правая часть неравенства (4) зависит только от (X_0, X'_0).

Поэтому если $\mathscr{P}_t^{X_0} \Longrightarrow \mathscr{P}$ для всех начальных состояний X_0, можно использовать интегрирование по стационарной мере $\mathscr{P}$ как и выше.

Заметим, что в ряде случаев это интегрирование вызывает некоторые трудности.

4. Конструирование параллельного склеивания для перескоков процесса восстановления

В этом разделе приводится базовая схема конструирования параллельного склеивания, на основе которой можно строить оценки скорости сходимости распределений различных регенерирующих процессов.

Итак, мы конструируем параллельное склеивание

$$(\mathscr{Z}_t,\, t \geqslant 0) = \big((Z_t, Z'_t)\,,\, t \geqslant 0\big)$$

для перескоков вложенных процессов восстановления $(B_t,\, t \geqslant 0)$ и $(B'_t,\, t \geqslant 0)$ для исследуемых регенерирующих процессов X_t, X'_t с различными начальными состояниями. Это значит, что процессы B_t, и B'_t имеют разные начальные состояния.

То есть соответствующие процессы восстановления начинаются до момента $t = 0$, и в момент $t = 0$ значения перескоков вложенных процессов восстановления различны: $B_0 = b$, $B'_0 = b'$; что можно обозначить как $B_t = B_t^b$, $B'_t = B_t^{b'}$.

Распределения этих процессов в момент t обозначим соответственно $\mathscr{P}_t^b$ и $\mathscr{P}_t^{b'}$.

Если мы оценим сл.в.

$$\tau(b,b') = \tau(b,b') \stackrel{\text{def}}{=} \inf\left\{t > 0 :\, Z_t = Z'_t\right\},$$

то можно получить оценку

$$\left\|\mathscr{P}_t^b(A) - \mathscr{P}^{b'}(A)\right\|_{\text{ПВ}} \leqslant \mathbf{P}\left\{\tau(b,b') > t\right\} \leqslant \frac{\mathbb{E}\,\varphi(\tau(b,b'))}{\varphi(t)}.$$

4.1. Некоторые сведения

В ходе конструирования параллельного склеивания надо уметь конструировать случайные величины (на некотором вероятностном пространстве).

Замечание 5. Напомним, как конструировать сл.в. по её ф.р. $F(s)$.

Определим обратную функцию к ф.р. $F(s)$ как

$$F^{-1}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{x :\ F(x) \geqslant y\}.$$

Если $\mathcal{U}$ – равномерно распределённая на $[0,1)$ сл.в., то $\xi \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1}(\mathcal{U})$ имеет ф.р. $F(s)$. ▷

Ранее говорилось, что B_t – это перескок процесса восстановления N_t с ф.р. времени восстановления $F(s)$;

$$N_t \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{1}(S_n < t),\ \text{где}\ S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{n} \xi_i, \quad \mathbf{E}\,\xi_i < \infty,$$

и ξ_i, $i \in \mathbb{Z}_+$ независимы в совокупности; $\mathbf{P}\{\xi_i \leqslant s\} = F(s)$, $i \in \mathbb{N}$. Напомним, что $B_t \stackrel{\text{def}}{=} (t - S_{N_t})$ – перескок процесса восстановления N_t.

Если $B_0 = b$ при $t = 0$, значит, последнее восстановление процесса N_t было в момент $t = -b$, и остаточное время периода восстановления (недоскок) W_0 имеет ф.р.

$$\begin{aligned}(5)\quad & \mathbf{P}\{W_0 \leqslant s | B_0 = b\} = \mathbf{P}\{\xi_0 - b \leqslant s | \xi_0 > b\} = \\ & \qquad = \mathbf{P}\left\{\xi_0 \in (b, b+s] | \xi_0 > b\right\} = \frac{F(s+b) - F(b)}{1 - F(b)} \stackrel{\text{def}}{=} F_b(s).\end{aligned}$$

Также напомним, что

$$(6)\qquad \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{B_t \geqslant s\right\} = \mu^{-1} \int\limits_s^{\infty} (1 - F(u))\,\mathrm{d}\,u \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \widetilde{F}(s),$$

где $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}\,\xi_1$ (см. [7]).

4.2. Первый шаг: конструирование процессов восстановления

Везде в дальнейшем $\mathcal{U}_i, \mathcal{U}'_i, \mathcal{U}''_i, \mathcal{U}'''_i, \ldots$ – независмые равномерно распределённые на $[0,1)$ сл.в..

1. Конструирование процесса $(B_t,\, t \geqslant 0)$с начальным состоянием $B_0 = b$. Обозначим $t_1 \stackrel{\text{def}}{=} F_b^{-1}(\mathcal{U}_1)$, $t_k \stackrel{\text{def}}{=} t_{k-1} + F^{-1}(\mathcal{U}_k)$, $k > 1$.

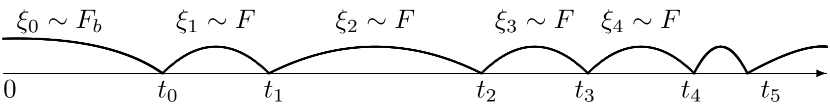

Рис. 3. Процесс X_t (соответствующий B_t)

2. Аналогично для B'_t с начальным состоянием $B'_0 = b'$ положим $t'_1 \stackrel{\text{def}}{=} F_{b'}^{-1}(\mathcal{U}'_1)$, $t'_k \stackrel{\text{def}}{=} t'_{k-1} + F^{-1}(\mathcal{U}'_k)$, $k > 1$.

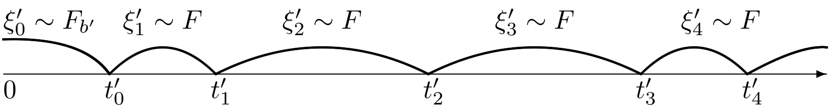

Рис. 4. Процесс X'_t (соответствующий B'_t)

Понятно, что вероятность склеивания (т.е. совпадения двух точек t_i и t_j) за конечное время равна нулю.

Более того, построенные процессы независимы, а в параллельном склеивании они будут зависеть.

Для конструирования параллельного склеивания (т.е. модификации предложенной выше конструкции) нам понадобится основная лемма склеивания (см., например, [10]).

***Лемма* 1 «Основная лемма склеивания».** *Пусть $f_i(s)$ – плотности распределения (п.р.) сл.в. θ_i ($i = 1, 2$). и*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \min(f_1(s), f_2(s))\, \mathrm{d}s = \varkappa > 0.$$

Тогда на некотором вероятностном пространстве существует две сл.в. ϑ_i *такие, что* $\vartheta_i \stackrel{\mathcal{D}}{=} \theta_i$, *и* $\mathbf{P}\{\vartheta_1 = \vartheta_2\} \geqslant \varkappa$. $\triangleright$

Величина $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \min(f_1(s), f_2(s))\, \mathrm{d}s = \varkappa$ называется <u>общей</u> <u>частью</u> распределений θ_i.

Доказательство. Пусть

$$\varphi(s) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \min\left(f_1(s), f_2(s)\right); \qquad \int\limits_0^{\infty} \varphi(s)\, \mathrm{d}\, s \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varkappa = \Phi(+\infty) > 0,$$

где $\Phi(s) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_0^{s} \varphi(u)\, \mathrm{d}\, u$.

Обозначим

$$\Psi(s) \stackrel{\mathrm{def}}{=} F_1(s) - \Phi(s), \quad \Psi_c(s) \stackrel{\mathrm{def}}{=} F_2(s) - \Phi(s);$$
$$\Psi_1(+\infty) = \Psi_2(+\infty) = 1 - \varkappa,$$

где $F_i(s)$ – ф.р. сл.в. θ_i.

Положим для независимых равномерно распределённых на $[0, 1)$ сл.в. $\mathcal{U}, \mathcal{U}', \mathcal{U}''$

$$\xi_1(\mathcal{U},\mathcal{U}',\mathcal{U}'') \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{1}(\mathcal{U} < \varkappa)\Phi^{-1}(\varkappa\mathcal{U}') + \mathbf{1}(\mathcal{U} \geqslant \varkappa)\Psi^{-1}((1-\varkappa)\mathcal{U}'');$$

$$\xi_2(\mathcal{U},\mathcal{U}',\mathcal{U}'') \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{1}(\mathcal{U} < \varkappa)\Phi^{-1}(\varkappa\mathcal{U}') + \mathbf{1}(\mathcal{U} \geqslant \varkappa)\Psi_c^{-1}((1-\varkappa)\mathcal{U}'').$$

Несложно заметить, что

$$\mathbf{P}\Big\{\xi_1(\mathcal{U},\mathcal{U}',\mathcal{U}'') \leqslant s\Big\} = F_1(s); \quad \mathbf{P}\Big\{\xi_2(\mathcal{U},\mathcal{U}',\mathcal{U}'') \leqslant s\Big\} = F_2(s);$$
$$\text{и } \mathbf{P}\left\{\xi_1(\mathcal{U},\mathcal{U}',\mathcal{U}'') = \xi_2(\mathcal{U},\mathcal{U}',\mathcal{U}'')\right\} = \varkappa.$$

<u>***Замечание 6.***</u> Фактически

$$\xi_i = \begin{cases} \widetilde{\xi} & \text{с вероятностью } \varkappa; \\ \widehat{\xi}_i & \text{с вероятностью } 1-\varkappa, \end{cases}$$

где независимые сл.в. $\widetilde{\xi}$ и $\widehat{\xi_i}$ имеют ф.р. $\dfrac{\Phi(s)}{\varkappa}$ и $\dfrac{\Psi(s)}{1-\varkappa}$. ▷

4.3. Второй шаг: модификация конструирования пары (B_t, B'_t) в параллельное склеивание

Вернёмся к нашим независимым процессам B_t и B'_t. У нас $B_0 = b$, $B'_0 = b'$, это – перескоки процессов восстановления.

То есть времена t_1 и t'_1 – остаточные времена периодов регенерации с ф.р. $F_b(s)$ и $F_{b'}(s)$ соответственно (см. (5)). Первый этап конструирования – это построение независимых сл.в. t_1 и t'_1.

После момента $T_1 \stackrel{\text{def}}{=} \max\{t_1, t'_1\}$ оба процесса начинают удовлетворять условиям Теоремы Лордена (очевидно, $T_1 \leqslant t_1 + t'_1 \stackrel{\text{def}}{=} \theta_0$).

На рис. 5 $T_1 = t'_1$. После момента T_1 к процессу B'_t можно применять неравенство Лордена, т.е. $\mathbb{E}\, B_{t'_1} \leqslant \Xi$ (см. (**??**)).

По неравенству Маркова, для любого $\Theta > \Xi \geqslant \mathbb{E}\, B'_{t'_1}$ верно неравенство $\mathbf{P}\left\{B'_{t'_1} < \Theta\right\} \geqslant 1 - \dfrac{\Xi}{\Theta} = p_0$ и в случае, если

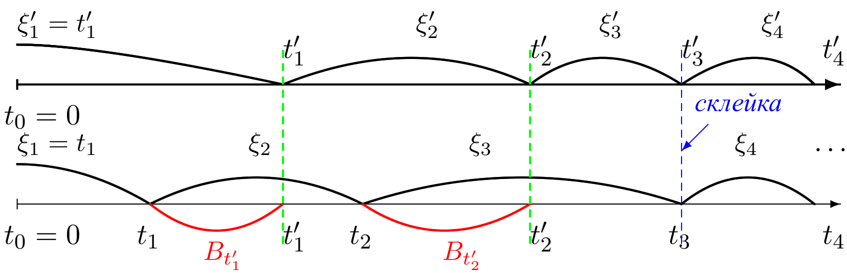

Рис. 5. На этом рисунке в точке t'_2 происходит склеивание

произойдёт событие $B_{t'_1} < \Theta$, можно оценить величину

$$\sup_{u\in(0,\Theta)} \int_0^\infty \min(\lambda(s+u), \lambda(s))\,\mathrm{d}s \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{u\in(0,\Theta)} \int_0^\infty \min(\varphi(s+u), \varphi(s))\,\mathrm{d}s = \kappa > 0,$$

так как почти всюду $\varphi(s) > 0$ (поскольку предполагается, что плотность распределения сл.в. ξ_i п.в. положительна).

Теперь, используя основную лемму склеивания, можно продолжить остаточное время периода восстановления процесса B_t и следующий период восстановления B'_t таким образом, что с вероятностью $\varkappa \stackrel{\text{def}}{=} p_0\kappa$, процессы B_t и B'_t совпадут в момент $t'_2 \stackrel{\text{def}}{=} \theta_1$.

(Заметим, что здесь использовалась некоторая величина $\Theta > \Xi$; выбор этой величины влияет на значение $\varkappa$, так что можно искать значение Θ, при котором значение $\varkappa$ максимально.)

Если в момент $t'_2 = \theta_1$ не произошло совпадения процессов (с вероятностью $\leqslant (1-\varkappa)$), то в следующий момент восстановления B'_t мы повторяем описанную выше конструкцию с перескоком B_t процесса восстановления в момент $t'_2 = \theta_2$ таким образом, что процессы B_t и B'_t совпадут с вероятностью $p_0\varkappa$ в момент $t'_3 = \theta_3$, и т.д. Таким образом, при условии, что в момент $t'_n = \theta_{n-1}$ произойдёт совпадение процессов B_t и B'_t,

$$\tau\left(B_0, B_0^{(t)}\right) \leqslant T_1 + \sum_{i=2}^{n} \xi'_i$$

с вероятностью $\varkappa(1-\varkappa)^{n-2}$ (здесь $T_1 \leqslant t_1 + t'_1$).

Иначе говоря, момент склеивания $\tau\left(B_0, B_0^{(t)}\right)$ оценивается сверху <u>условной</u> геометрической суммой периодов восстановления, включая сумму первых (возможно, неполных) периодов восстановления B_t и B'_t.

Если существует конечный момент $\mathbb{E}\,(\xi)^{\ell+1} = C_\ell\,(B_0, B_0')$, то можно получить оценку сверху для

$$\mathbb{E}\,\left(\tau\left(B_0, B_0^{(t)}\right)\right)^\ell = C_\ell\,\left(B_0, B_0'\right) = C_\ell\,\left(b, b'\right).$$

Для этого можно использовать хорошо известное
Неравенство Йенсена:

Для действительнозначной выпуклой (вниз) функции φ, чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из её непрерывной области определения, и положительных величин a_i, неравенство Йенсена можно сформулировать так:

$$\varphi\left(\frac{\sum a_i x_i}{\sum a_i}\right) \leqslant \frac{\sum a_i \varphi(x_i)}{\sum a_i}$$

и, следовательно,

$$\varphi\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) \leqslant \frac{\sum \varphi(x_i)}{n}.$$

Если существует $\mathbb{E}\,\xi^{\ell+1} < \infty$, оценим

$$\mathbb{E}\,\left(T_1 + \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i\right)^\ell = \mathbb{E}\,\left(\frac{(\nu+1)\times\left(T_1 + \sum\limits_{i=1}^{\nu}\xi_i\right)}{\nu+1}\right)^\ell \leqslant$$

$$\leqslant \mathbb{E}\,(\nu+1)^\ell \frac{(T_1)^\ell + \sum\limits_{i=1}^{\nu}\xi_i^\ell}{\nu+1} = \mathbb{E}(\nu+1)^{\ell-1} \times \mathbb{E}\,T_1^\ell +$$
$$+ \sum_{i=1}^{\infty}\left((i+1)\times\sum_{j=1}^{i-1}\mathbb{E}\,(\xi_j^\ell|\mathscr{E}_i)\mathbf{P}(\mathscr{E}_i) + \mathbb{E}\,(\xi_i^\ell|\mathscr{E}_i)\mathbf{P}(\mathscr{E}_i)\right),$$

где $\mathscr{E}_i = \bigcup\limits_{j=1}^{i-1}\overline{\mathcal{S}}_j \cup \mathcal{S}_i$, а $\mathcal{S}_i$ – событие $\{$момент θ_i – это момент склеивания $\tau\}$.

Заметим, что $\mathbf{P}(\mathcal{S}_i) = (1-\varkappa)^{i-1}(1-\varkappa) \leqslant (1-\varkappa)^{i-1}$, а также используем очевидное неравенство

$$\mathbb{E}\,(\xi|A)\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbb{E}\,(\xi). \tag{7}$$

Поэтому

$$\mathbb{E}\,(\xi_j^\ell|\mathscr{E}_i)\mathbf{P}(\mathscr{E}_i) \leqslant \mathbb{E}\,(\xi_j^\ell|\mathscr{E}_i)\prod_{j=1}^{i-1}(1-\mathbf{P}(\mathcal{S}_j)) \leqslant \mathbb{E}\,\xi_j^\ell(1-\varkappa)^{i-2};$$

$$\mathbb{E}\,(\xi_i^\ell|\mathscr{E}_i)\mathbf{P}(\mathscr{E}_i) \leqslant \mathbb{E}\,\xi_i^\ell(1-\varkappa)^{i-1} \leqslant (1-\varkappa)^{i-2}.$$

Таким образом, $\mathbb{E}\left(T_1+\sum\limits_{i=1}^{\nu}\xi_i\right)^\ell \leqslant$

$$\leqslant \mathbb{E}(\nu+1)^{\ell-1}\times \mathbb{E}\,T_1^\ell + \mathbb{E}\,\xi_i^\ell\sum_{i=1}^{\infty}(i+1)^2(1-\varkappa)^{i-1} =$$

$$= \Upsilon(b,b',\Theta,F(\cdot)),$$

эта величина $\Upsilon(\ell,b,b',\Theta,F(\cdot))$ может быть вычислена или оценена.

Учитывая, что предельное (стационарное) распределение перескока процесса восстановления известно (5), и только величина T_1 зависит от b и b', интегрирование величины $\Upsilon(\ell,b,b',\Theta,F(\cdot))$ не представляет больших трудностей. Таким образом, верна

Теорема 4. *Если конечна величина* $\mathbb{E}\,\xi^{\ell+1}$, *то можно вычислить величину* $\widetilde{\Upsilon}(\ell,b,b',\Theta,F(\cdot)) = \int\limits_0^\infty \Upsilon(\ell,b,\Theta,F(\cdot))\,\mathrm{d}\widetilde{F}(b')$ *такую, что*

$$\left\|\mathscr{P}_t^b-\widetilde{\mathscr{P}}\right\|_{\textit{ПВ}} \leqslant \frac{\widetilde{\Upsilon}(\ell,b,\Theta,F(\cdot))}{t^\ell}. \qquad \square$$

Оценка экспоненциальных моментов сл.в. $\tau(b,b')$ существенно сложнее, так как неравенство (7) не даёт возможности вычислить оценку $\mathbb{E}\exp(\beta\tau)$; здесь для получения оценки можно использовать свойства конкретного распределения $F(s)$ или более тонкие оценки при конструировании параллельного склеивания, на чём мы здесь не будем останавливаться. Тем не менее, если

$\mathbb{E}\exp(\alpha\xi)$, то можно оценить

$$\mathbb{E}\exp\left(\beta\times\left(T_1+\sum_{i=1}^{\nu}\xi_i\right)\right)$$

для некоторого $\beta\in(0,\alpha)$, и поэтому верна

Теорема 5. *Если* $\mathbb{E}\exp(\alpha\Xi)<\infty$*, то для некоторого* $\beta\in(0,\alpha)$ *можно вычислить постоянную* $K_\beta(b,b')$ *такую, что* $\mathbb{E}\exp(\beta\tau(b,b'))\leqslant K_\beta(b,b')$*, и*

$$\left\|\mathscr{P}_t^b-\widetilde{\mathscr{P}}\right\|_{\mathit{ПВ}}\leqslant\widetilde{K}_\beta(b)\exp(-\beta t),$$

где $\widetilde{K}_\beta(b)=\int\limits_0^\infty\exp(K_\beta(b,b'))\,\mathrm{d}\widetilde{F}(b')$. ▷

5. Заключение

Использование предложенных способов вычисления строгих оценок сверху для регенерирующих процессов может быть использован при анализе поведения различных сложных СМО, СеМО и систем надёжности. Оценив время $\mathcal{T}$ достижения приемлемого уровня близости распределения исследуемой модели, исследователь может с помощью имитационного моделирования проанализировать поведение системы до достижения времени $\mathcal{T}$ и использовать эти данные при прогнозировании поведения аналогичных систем.

Для случая, когда исследуемая модель включает несколько параллельных технологических процессов, может применяться естественное обобщение основной леммы склеивания:

***Лемма* 2 Обобщение основной леммы склеивания.** *Пусть* $f_i(s)$ *– плотности распределения сл.в.* θ_i *(*$i=1,\ldots,n$*). и пусть*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\min_{i=1,\ldots,n}(f_i(s))\,\mathrm{d}s=\varkappa>0.$$

Тогда на некотором вероятностном пространстве существует n сл.в. ϑ_i ($i = 1, \ldots, n$), таких, что $\vartheta_i \stackrel{\mathcal{D}}{=} \theta_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$, и

$$\mathbf{P}\{\vartheta_1 = \vartheta_2 = \ldots = \vartheta_n\} \geqslant \varkappa. \qquad \triangleright$$

Доказательство этой леммы конструктивно и подобно доказательству основной леммы склеивания (см., например, [13]).

Используя обобщение основной леммы склеивания и предложенный в [13] подход к конструированию многомерных марковски модулированных процессов, можно получать оценки момента склеивания (склейки) сконструированных по предложенной выше схеме «параллельных» (т.е. имеющих те же маргинальные распределения) случайных процессов для широкого круга задач ТМО, СеМО и теории надёжности.

Умение оценивать сверху, а не только указывать тип скорости сходимости (степенной, экспоненциальный) важно для практического использования различных стохастических моделей. Использование таких оценок позволяет узнать, когда распределение используемой системы станет достаточно близко к предельному (стационарному) распределению. До этого момента можно оценивать поведение используемой системы с помощью имитационного моделирования, что не всегда бывает экономически оправдано.

Поэтому так важно уметь оценивать гарантированное время до приближения распределения используемой системы к стационарному режиму.

Литература

1. АНИЧКИН С.А. *Склеивание процессов восстановления и его применение* // Проблемы устойчивости стохастических моделей. – Труды семинара. – М.: ВНИИСИ, 1984. – С. 4–24.
2. БОРОВКОВ А.А. *Вероятностные процессы в теории массового обслуживания*. – М.: Физматлит, 1972.

3. ВЕРЕТЕННИКОВ А.Ю. *Параметрическое и непараметрическое оценивание для цепей Маркова*. Изд-во центра прикладных исследований при мех-мат ф-те МГУ, 2000.
4. ГНЕДЕНКО Б.В., КОВАЛЕНКО И.Н. *Введение в теорию массового обслуживания*. – М.: Наука, 1966.
5. КАЛАШНИКОВ В.В. *Метод склеивания, его развитие и применения* // В кн.: Е. Нуммелин Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы. – М.: Мир, 1989. – С. 176–190.
6. КЕМЕНИ ДЖ.ДЖ., СНЕЛЛ ДЖ.Л. *Конечные цепи Маркова*. – М.: Наука, 1970.
7. КОКС Д., СМИТ В. *Теория восстановления*. – М.: Советское радио, 1967.
8. GRIFFEATH D. *A maximal coupling for Markov chains* // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete. – 1975. – Vol. 31, Iss. 2. – P. 95–106.
9. KALASHNIKOV V.V. *Mathematical methods in queueing theory*. – Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, 1994.
10. KATO K. *Coupling Lemma and Its Application to The Security Analysis of Quantum Key Distribution* // Tamagawa University Quantum ICT Research Institute Bulletin. – 2014. – Vol. 4, No. 1. – P. 23–30.
11. LINDVALL T. *Lectures on the Coupling Method*. – Wiley, New York, 1992.
12. LORDEN G. *On Excess Over the Boundary* // Ann. Math. Statist. – April, 1970. – Vol. 41(2). – P. 520–527.
13. ZVERKINA G. *Ergodicity and Polynomial Convergence Rate of Generalized Markov Modulated Poisson Processes* // Proc. of the 23rd Int. Conf. on Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications (DCCN-2020, Moscow). – Cham: Springer, 2021. – Vol. 1337. – P. 367–381.

APPLICATION OF THE COUPLING METHOD FOR THE ASYMPTOTIC ANALYSIS OF REGENERATIVE PROCESSES IN QUEUING THEORY AND RELATED PROBLEMS

Galina Zverkina, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., assistant professor (zverkina@gmail.com).
Mais Farhadov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doct.Sc., professor (mais@ipu.ru).

Abstract: In queuing theory (QT) and related problems, it is very important to know the numerical characteristics of an investigated system – both in stationary and non-stationary modes. Sometimes they can be calculating, but this is not possible for all models. However, it is often possible to calculate or estimate the stationary values of the characteristics of the models under study. If for a certain characteristic the rate of convergence (or an upper estimate of the rate of convergence) to a stationary value is known, then its value can be estimated at any time. At the same time, the behavior of many processes in QT and in related fields can be describing by linear Markov processes, which are often regenerative Markov processes (RMPs). If the regeneration period of RMP has a finite average value, then RMP is ergodic. To obtain upper bounds for the rate of convergence of RMP distribution to a stationary distribution, the coupling method may be used. The purpose of this paper is to show the application of the coupling method. This article is a small review of currently actively developing methods for obtaining upper bounds of the rate of convergence of the distribution of regenerative processes and fills the existing gap in the domestic literature.

Keywords: queuing theory; regenerating Markov processes; coupling method for piecewise linear Markov processes; the total variation metric.

УДК 519.2
ББК 22.171
DOI: 10.25728/ubs.2022.97.1

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.М. Вишневским.

Поступила в редакцию 11.05.2022.
Дата опубликования 31.05.2022.