ПРОБЛЕМЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПО CC-VAR НА КОМБИНАЦИИ РЫНКОВ ОПЦИОНОВ

Агасандян Г. А.[1]
(*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН*)

Работа продолжает изучение проблем использования континуального критерия VaR (CC-VaR) на финансовых рынках. Речь идет о применении CC-VaR на совокупности одного двумерного и двух одномерных теоретических рынков опционов, частично связанных между собой базовыми активами. Построение оптимального по CC-VaR комбинированного портфеля ведется на основе расхождений в относительных доходах между рынками с сохранением требований критерия. Реализуемость получаемого решения обеспечивается рандомизацией структуры базиса. Сложность объекта исследования побуждает при формировании исходных данных применять специальный эконометрический подход для получения их полного аналитического описания, упрощающего вычислительные эксперименты. В отличие от прежних работ автора, в которых решалась весьма полезная для теоретических исследований задача CB, здесь решается более привычная задача CG, в которой задана начальная сумма инвестиции, а функция рисковых предпочтений (ф.р.п.) инвестора зависит от ее масштаба. Требуется найти значение параметра и регулярный комбинированный портфель с наибольшим средним доходом при выполнении CC-VaR. Предлагаемые конструкции проверяются на примере с бета-распределенными прогнозными и стоимостными характеристиками задачи. Для целей иллюстрации методики строится и идеалистичная версия портфеля, позволяющая на одном двумерном графике воплотить идеи комбинирования портфелей разных размерностей.

Ключевые слова: базовые активы, континуальный критерий VaR (CC-VaR), функция рисковых предпочтений (ф.р.п.), стоимостная и прогнозная плотности, функция относительных доходов, процедура Неймана-Пирсона, комбинированный портфель, рандомизация, идеалистичный портфель.

1. Введение

Работа продолжает исследования по применению введенного автором континуального критерия VaR (CC-VaR) на рынках

---

[1] *Геннадий Аршавирович Агасандян, д.ф.-м.н.* (*agasand17@yandex.ru*).

опционов [1–5]. Изучается оптимальное поведение инвестора на совокупности нескольких рынков, возможно разных размерностей и взаимосвязанных базовыми активами [3, 4].

В связи с усложнением объекта исследования в рамках инструментария формирования исходных данных задачи предлагается подход, связанный с использованием известной из эконометрики так называемой копулы [6] и дающий их полное аналитическое описание.

Для демонстрации широкой применимости CC-VaR и уточнения расширенной структуры алгоритма здесь вместо удобных для анализа *задач CB*, обычно решаемых в исследовательских целях, изучается более традиционно формулируемая *задача CG* (общая континуальная). В ней инвестиционная сумма определена заранее и ищется регулярный портфель, приносящий максимальный средний доход при выполнении требований CC-VaR.

Поскольку решать аналитически теоретическую задачу, как правило, не удается, используется дискретный алгоритм оптимизации на моделях с достаточно подробной структурой сценариев. Для поиска решения применяется итеративная процедура.

2. Постановка задачи

Напомним, что критерий CC-VaR требует, чтобы портфель инвестора порождал доход q, удовлетворяющий неравенствам

(1) $\mathsf{P}\left\{q \ge \phi\left(\varepsilon\right)\right\} \ge 1-\varepsilon$ *сразу* для *всех* $\varepsilon \in [0, 1]$,

где $\phi(\varepsilon)$ – неотрицательная монотонно возрастающая и непрерывная *функция рисковых предпочтений* (ф.р.п.) инвестора.

При намечаемом решении задачи *CG* ф.р.п. принимает вид $\phi(\varepsilon; w)$, где w – масштабный параметр инвестиции. Требуется найти значение параметра w^* и невырожденный портфель (без сингулярной компоненты), доставляющий максимум среднему случайного дохода q при *заданной* инвестиционной сумме A и полном выполнении неравенств (1) в форме

(2) $\mathsf{P}\left\{q \ge \phi\left(\varepsilon; w^*\right)\right\} \ge 1-\varepsilon$ для *всех* $\varepsilon \in [0, 1]$.

Рассматривается совокупность трех рынков, один из которых – двумерный рынок #0 с парой базовых активов (***X***, ***Y***), а два других – одномерные рынки #X и #Y с активами ***X*** и ***Y*** соответственно. Как обычно для задач с CC-VaR, все рынки изначально предполагаются однопериодными, теоретическими и идеальными. Решение ищется в форме комбинированного портфеля, составленного из трех портфелей, каждого на своем рынке.

Вкратце приводим некоторые важные для последующего изложения определения и обозначения агрегатов рынков с учетом их совместной работы.

Цены (случайные) двух базовых активов (в конце периода) обозначаются x и y, параметры инструментов – s и t, при этом $x, s \in \mathsf{X}$, $y, t \in \mathsf{Y}$.

Для *двумерного* рынка #0 на начало периода заданы *прогнозная* $p(x, y)$ и *стоимостная* $c(x, y)$ плотности, порождающие меры $\mathsf{P}\{\cdot\}$ и $\mathsf{C}\{\cdot\}$ соответственно и относительный доход $\rho(\cdot,\cdot) = p(\cdot,\cdot)/c(\cdot,\cdot)$. Маргинальные (одномерные) плотности этих двумерных плотностей обозначаются $p_1(x)$, $p_2(y)$ и $c_1(x)$, $c_2(y)$, $x \in \mathsf{X}, y \in \mathsf{Y}$.

На теоретическом *рынке* #0 можно торговать любым инструментом ***G***, порождающим доход, представимый в виде произвольной неотрицательной измеримой функции $g(x, y)$, называемой *платежной функцией* и обозначаемой $g(x, y) = \pi(x, y; \boldsymbol{G})$.

Рыночная стоимость инструмента ***G*** (в начале периода) записывается как $|\boldsymbol{G}|$, а средний доход (рассчитанный на конец периода) – $\|\boldsymbol{G}\|$. На таком рынке базис образуют δ-инструменты $\boldsymbol{D}(s, t)$, приносящие случайный доход в виде двумерной обобщенной *δ-функции* $\delta(x - s, y - t)$. Имеют место соотношения

(3) $$\left|\boldsymbol{D}(s,t)\right| = c(s,t), \quad \left\|\boldsymbol{D}(s,t)\right\| = p(s,t), \quad s \in \mathsf{X},\ t \in \mathsf{Y},$$

(4) $$\boldsymbol{G} = \int_{\mathsf{X}\times\mathsf{Y}} g(s,t)\,\boldsymbol{D}(s,t)\,dsdt\,.$$

Для одномерного рынка #X заданы плотности $p_{\mathrm{X}}(x)$ и $c_{\mathrm{X}}(x)$, $x \in \mathsf{X}$, порождающие меры $\mathsf{P}_{\mathrm{X}}\{\cdot\}$ и $\mathsf{C}_{\mathrm{X}}\{\cdot\}$ соответственно и относительный доход $\rho_{\mathrm{X}}(x) = p_{\mathrm{X}}(x)/c_{\mathrm{X}}(x)$.

Произвольный инструмент $\boldsymbol{G}_{\mathrm{X}}$ определяется своей платежной функцией $g_{\mathrm{X}}(x) = \pi(x; \boldsymbol{G}_{\mathrm{X}})$, $x, s \in \mathsf{X}$, а инструменты $\boldsymbol{D}_{\mathrm{X}}(s)$ образуют базис, при этом $\pi(x; \boldsymbol{D}_{\mathrm{X}}(s)) = \delta(x - s)$, и

$$\left|\boldsymbol{D}_{\mathrm{X}}(s)\right| = c_{\mathrm{X}}(s), \quad \left\|\boldsymbol{D}_{\mathrm{X}}(s)\right\| = p_{\mathrm{X}}(s), \quad s \in \mathsf{X},$$

$$\boldsymbol{G}_{\mathrm{X}} = \int_{\mathsf{X}} g_{\mathrm{X}}(s)\, \boldsymbol{D}_{\mathrm{X}}(s)\, ds .$$

Так же вводятся аналогичные агрегаты рынка #Y с очевидными заменами X→Y, $x \to y$, $\mathsf{X} \to \mathsf{Y}$, $s \to t$, $\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$.

Для двумерных плотностей $p(\cdot,\cdot)$ и $c(\cdot,\cdot)$ рынка #0

(5) $$\int_{\mathsf{X}\times\mathsf{Y}} p(x, y)\, dxdy = 1, \quad \int_{\mathsf{X}\times\mathsf{Y}} c(x, y)\, dxdy = 1/r ,$$

где r – безрисковый относительный доход за период.

Введенные рынки самостоятельны настолько, что на каждом проводится свое ценообразование. И потому безрисковые ставки относительного дохода на них могут различаться. Тем не менее без ущерба для общности в (5) можно принять $r = 1$ и считать $c(\cdot,\cdot)$ плотностью вероятности, порождаемой рынком. Но для рынков #X и #Y безрисковые ставки относительного дохода r_{X} и r_{Y}, вообще говоря, уже не равны единице:

(6) $$\int_{\mathsf{X}} c_{\mathrm{X}}(x)\, dx = r_{\mathrm{X}}^{-1}, \quad \int_{\mathsf{Y}} c_{\mathrm{Y}}(y)\, dy = r_{\mathrm{Y}}^{-1} .$$

И, более того, плотность $c_{\mathrm{X}}(x)$ может отличаться от маргинальной для рынка #0 плотности $c_1(x)$, а $c_{\mathrm{Y}}(y)$ – от $c_2(y)$. При этом, тем не менее, естественно считать, что

(7) $$p_{\mathrm{X}}(x) \equiv p_1(x), \quad p_{\mathrm{Y}}(y) \equiv p_2(y), \quad x \in \mathsf{X}, y \in \mathsf{Y},$$

так как все прогнозные плотности $p(x, y)$, $p_{\mathrm{X}}(x)$, $p_{\mathrm{Y}}(y)$ являются предметом единого цельного прогноза инвестора.

Отметим, что подобных реальных рынков, для которых рассматриваемая модель многомерного рынка могла бы служить теоретической абстракцией, на сегодня не существует. Однако присущее им свойство коллективной доходности отдаленно роднит их с биржами, торгующими фондовыми индексами. Хотя говорить о применимости и выдерживании CC-VaR на таких биржах портфельными доходами едва ли возможно.

Эта особенность многомерных рынков не допускает обмена между рынками инструментальными средствами, хотя, естественно, сохраняется возможность перемещения освобождаемых в сделках денежных средств. В связи с этим, например, двумерный безрисковый инструмент $\boldsymbol{U}$ равен по стоимости комбинации $½\boldsymbol{U}_X + ½\boldsymbol{U}_Y$, а не $\boldsymbol{U}_X + \boldsymbol{U}_Y$ (см. [3]).

Основные числовые показатели инвестиционного портфеля, такие как инвестиционная сумма A, средний доход R и средняя доходность y, служат для сравнения вариантов рассматриваемых портфелей и образуют *запись результатов* $\mathbf{L} = \langle A.\ R.\ y\rangle$, где

(8) $$A = \int_0^1 \phi(\varepsilon) d\gamma(\varepsilon), \quad R = \int_0^1 \phi(\varepsilon) d\varepsilon, \quad y = R/A - 1 > 0.$$

3. Оптимизация комбинированного портфеля

Как правило, аналитического решения континуальной задачи получать не удается, и потому приходится ограничиваться нахождением его аппроксимацией из модели сценарного рынка с достаточно большим в рамках и по условиям исследовательской работы количеством сценариев.

3.1. ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРАВИЛА ЗАМЕЩЕНИЯ ДЛЯ СЦЕНАРИЕВ

Рассматривается та же совокупность рынков с теми же базовыми активами, но со сценарными ограничениями на инструментарий. Сценарная дискретизация вводится равномерным разбиением множества X на m сценариев $S_i = [x_{i-1}, x_i) \subset \mathsf{X}$, $x_0 = 0$, $x_i = x_0 + i/m$, $i \in I = \{1, \ldots, m\}$, а множества Y – на n сценариев $T_j = [y_{j-1}, y_j) \subset \mathsf{Y}$, $y_0 = 0$, $y_j = y_0 + j/n$, $j \in J = \{1, \ldots, n\}$.

Их прямым произведением получаются $m \times n$ двумерных сценариев, базисными инструментами становятся индикаторы сценариев $\boldsymbol{D}_{ij} = \boldsymbol{H}\{S_i \times T_j\}$ (см [2, 5]), интегралы заменяются суммами, плотности заменяются вероятностями (или стоимостями) для сценариев. И, в частности, вместо (3), (4) имеем

(9) $$\left|\boldsymbol{D}_{ij}\right| = c_{ij} = \int_{S_i \times T_j} c(s,t) ds dt, \quad \left\|\boldsymbol{D}_{ij}\right\| = p_{ij} = \int_{S_i \times T_j} p(s,t) ds dt,$$

(10) $$\boldsymbol{G} = \sum_{ij} g_{ij} \boldsymbol{D}_{ij}, \quad i \in I,\ j \in J.$$

Для решения общей задачи (как и ряда промежуточных) используется стандартный дискретный алгоритм решения задачи CB (см. [2, 4]) на основе процедуры Неймана – Пирсона [7].

В алгоритме основные агрегаты участвуют в векторной форме (и для двумерного рынка). В краткой форме алгоритм записывается последовательностью операций:

(11) $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{p}/\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{O}(\boldsymbol{\rho})$, $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{O}(\boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{Td}$;

(12) $\boldsymbol{b} = \phi(\boldsymbol{\varepsilon})$, $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{\eta})$, $A = (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{c})$, $R = (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{p})$, $y = R/A - 1$.

Здесь $\boldsymbol{O}$ – оператор упорядочения вектора-операнда по возрастанию его компонент, $\boldsymbol{d}$ – прогнозный вектор вероятностей, упорядоченный по возрастанию компонент $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{T}$ – нижняя треугольная матрица, состоящая из нулей и единиц (единицы на диагонали и ниже) и обеспечивающая надлежащее суммирование компонент вектора $\boldsymbol{d}$.

Для оптимизации комбинированного портфеля формируется единая матрица относительных доходов путем замены значений ρ_{ij} матрицы $\boldsymbol{\rho}$ рынка #0 для всех тех двумерных сценариев и теми значениями $\rho_{\mathrm{X};i}$ или $\rho_{\mathrm{Y};j}$ векторов $\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{X}}$ или $\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{Y}}$ для рынков #X и #Y с сопоставимыми вероятностями в тех случаях, когда последние оказываются наибольшими из всех трех функций (см. также [3, 4]).

С надеждой не породить путаницы у читателя при этом сохраняются некоторые векторные обозначения для матриц, поскольку их часто приходится интерпретировать как векторы с лексикографическим порядком элементов.

Формально правила замещения на дискретном (сценарном) рынке определяются разделением множества $I \times J$ всех сценариев на три подмножества M_0, M_1, M_2, состоящие из тех и только тех пар (i, j), $i \in I$, $j \in J$, для которых максимальным является относительный доход соответственно на рынках #0, #X, #Y:

(13) $M_0 = \left\{ (i, j) \,\middle|\, \rho_{ij} \ge \rho_{\mathrm{X};i} \;\&\; \rho_{ij} \ge \rho_{\mathrm{Y};j} \right\}$,

(14) $M_1 = \left\{ (i, j) \,\middle|\, \rho_{\mathrm{X};i} > \rho_{ij} \;\&\; \rho_{\mathrm{X};i} \ge \rho_{\mathrm{Y};j} \right\}$,

(15) $M_2 = \left\{ (i, j) \,\middle|\, \rho_{\mathrm{Y};j} > \rho_{ij} \;\&\; \rho_{\mathrm{Y};j} > \rho_{\mathrm{X};i} \right\}$.

Множества M_0, M_1 и M_2 взаимно не пересекаются и в объединении дают полное множество $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$. Эти правила замещения могут быть записаны в виде *матрицы замещений*, помечающей сценарии символами 0, 1, 2 на множестве сценариев $I \times J$:

(16) $\mathbf{A} = \left\| a_{ij} \right\|, \quad a_{ij} = k \;\Leftrightarrow\; (i, j) \in M_k, \quad k = 0,1,2$.

Уже на этой стадии решения задачи по получении разделения (13)–(15) можно построить упрощенную версию комбинированного портфеля, называемую *суррогатным* портфелем. Это делается формальной заменой *по всем сценариям* базисных инструментов рынка #0 *суррогатными* базисными инструментами с теми же платежными функциями и вероятностями, но с ценами, скорректированными согласно правилам замещения (13)–(15) и с учетом цен на рынках #X, #Y. Эти инструменты для *суррогатного* портфеля с соответствующими им ценами могут быть записаны при a_{ij} = 0, 1, 2 как

$$\boldsymbol{D}_{ij}^{srg}, \quad c_{ij}^{srg} = \left| \boldsymbol{D}_{ij}^{srg} \right| = c_{ij},\; p_{ij} / \rho_{\mathrm{X};i},\; p_{ij} / \rho_{\mathrm{Y};j},\; i \in I,\; j \in J.$$

Далее образуется вектор относительных доходов, и на его основе алгоритм определяет портфель с матрицей весов $\boldsymbol{g}^{srg}$:

(17) $\boldsymbol{G}^{srg} = \sum_{i \in I,\, j \in J} g_{ij}^{srg} \boldsymbol{D}_{ij}^{srg}$.

Этот портфель действительно строится просто, но он нереализуем на рассматриваемых рынках и потому не может быть решением задачи. Хотя по своим формальным показателям он должен быть близок к строящемуся комбинированному портфелю и тем самым может служить средством проверки (пусть и не вполне адекватным) правильности алгоритма.

Классификация (13)–(15) порождает инструменты рынка #0, которые надлежит заместить инструментами рынков #X, #Y:

(18) $\boldsymbol{M}_{1;i} = \boldsymbol{D}_{1;i} \times \boldsymbol{H}_2 \left\{ M_{1;i} \right\}, \quad \boldsymbol{M}_{2;j} = \boldsymbol{D}_{2;j} \times \boldsymbol{H}_1 \left\{ M_{2;j} \right\}$,

где $\boldsymbol{D}_{1;i}$, $\boldsymbol{D}_{2;j}$ – сценарные индикаторы, $M_{1;i} \subset J$, $M_{2;j} \subset I$, – множества соответственно по второй и первой координатам рынка #0, $\boldsymbol{H}_1\{\cdot\}$, $\boldsymbol{H}_2\{\cdot\}$ – инструментальные индикаторы множеств.

Замещать их базисными инструментами $\boldsymbol{D}_\mathrm{X}$, $\boldsymbol{D}_\mathrm{Y}$ рынков #X, #Y следует с сопоставимыми вероятностями. Но простое замещение, очевидно, меняет вероятности. Не подходят и сохраняющие вероятности замещения

(19) $\boldsymbol{M}_{\mathrm{X};i} = \boldsymbol{D}_{\mathrm{X};i} \times \boldsymbol{H}_2 \left\{ M_{1;i} \right\}, \quad \boldsymbol{M}_{\mathrm{Y};j} = \boldsymbol{D}_{\mathrm{Y};j} \times \boldsymbol{H}_1 \left\{ M_{2;j} \right\}$,

поскольку подобными инструментами рассматриваемая совокупность рынков не располагает.

При подобном замещении не ведет к цели и уменьшение количеств инструментов $\boldsymbol{D}_{\text{X};i}$ и $\boldsymbol{D}_{\text{Y};j}$ в портфеле. Этим можно добиться сохранения средних доходов, но в таком случае ухудшается выполнение критерия CC-VaR. С таким критерием, например, не все равно: 1) получить единичный и нулевой доходы с вероятностями по ½; (2) получить доход ½ с единичной вероятностью; хотя в среднем это одно и то же.

3.2. РАНДОМИЗАЦИЯ БАЗИСНЫХ ИНСТРУМЕНТОВ

Выход находится в применении на рынках #X и #Y *рандомизации*, делающей случайными в комбинированном портфеле сами базисные инструменты. На рынках #X, #Y для всех сценариев $i \in I$, $j \in J$ соответственно вводятся взаимонезависимые *биномиальные* случайные величины $\vartheta_{\text{X};i}$, $\vartheta_{\text{Y};j}$ и векторы $\boldsymbol{\theta}_{\text{X}}$, $\boldsymbol{\theta}_{\text{Y}}$ вероятностей *замещения* (*успеха*) $\theta_{\text{X};i}$, $\theta_{\text{Y};j}$:

(20) $\boldsymbol{\theta}_{\text{X}} = \left\{\theta_{\text{X};i}, i \in I\right\}, \quad \theta_{\text{X};i} = \mathsf{P}\left\{M_{1;i} \middle| i\right\} = \sum_{j \in M_{1;i}} p_{ij} \Big/ p_{1;i}$;

(21) $\boldsymbol{\theta}_{\text{Y}} = \left\{\theta_{\text{Y};j}, j \in J\right\}, \quad \theta_{\text{Y};j} = \mathsf{P}\left\{M_{2;j} \middle| j\right\} = \sum_{i \in M_{2;j}} p_{ij} \Big/ p_{2;j}$.

Параметры $\theta_{\text{X};i}$, $\theta_{\text{Y};j}$ – условные вероятности замещения для рынков #X и #Y при реализации сценариев $i \in I$ и $j \in J$ соответственно. Формально базисные инструменты для рынков #X, #Y и каждых $i \in I, j \in J$ вводятся как

(22) $\boldsymbol{D}_{\text{X};i}^{cmb} = \vartheta_{\text{X};i}\boldsymbol{D}_{\text{X};i}, \quad \boldsymbol{D}_{\text{Y};j}^{cmb} = \vartheta_{\text{Y};j}\boldsymbol{D}_{\text{Y};j}$.

Они совпадают с инструментами $\boldsymbol{D}_{\text{X};i}$, $\boldsymbol{D}_{\text{Y};j}$ лишь с вероятностями $\theta_{\text{X};i}$, $\theta_{\text{Y};j}$, а с вероятностями $1 - \theta_{\text{X};i}$, $1 - \theta_{\text{Y};j}$ становятся *нулевыми* инструментами $\boldsymbol{N}_{\text{X};i}$, $\boldsymbol{N}_{\text{Y};j}$ (ничего не стоящими и приносящими нулевой доход). Их стоимости и средние доходы (также связанные с ними вероятности) соответственно равны

(23) $\left|\boldsymbol{D}_{\text{X};i}^{cmb}\right| = c_{\text{X};i}^{cmb} = \theta_{\text{X};i}\, c_{\text{X};i}, \quad \left\|\boldsymbol{D}_{\text{X};i}^{cmb}\right\| = p_{\text{X};i}^{cmb} = \theta_{\text{X};i}\, p_{1;i}$;

(24) $\left|\boldsymbol{D}_{\text{Y};j}^{cmb}\right| = c_{\text{Y};j}^{cmb} = \theta_{\text{Y};j}\, c_{\text{Y};j}, \quad \left\|\boldsymbol{D}_{\text{Y};j}^{cmb}\right\| = p_{\text{Y};j}^{cmb} = \theta_{\text{Y};j}\, p_{2;j}$.

Задания векторных параметров $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{X}}$ (20) и $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{Y}}$ (21) уравнивают вероятности, связанные с инструментами (18) и (19)**.** И подтверждением этому служат вторые соотношения в (23) и (24).

Замечание. Применение на рынках статистических критериев, как и CC-VaR, есть однократное действие. Однако статистический характер задач предполагает определенную повторяемость принимаемых решений, и это порождает некоторую амбивалентность в их оценке. Те же соображения лежат и в основе рандомизации. Она усложняет правила поведения выходом за рамки детерминированных решений, но служит частью общего процесса принятия решений в случайных средах.

Инструменты (22) со своими ценами и средними доходами на рынках #X и #Y соответственно вместе с инструментами (9), (10) на рынке #0 с вероятностями c_{ij} и p_{ij}, $i \in I$, $j \in J$, на множестве M_0 образуют весь *комбинированный* базис.

Для этого базиса формируется единая функция *относительных доходов*, и к ней применяется общий теоретический алгоритм оптимизации, основанный на процедуре Неймана – Пирсона [7]. В результате его работы производится новое назначение всех вероятностей, и строится новая весовая функция базисных инструментов. А оптимальный *комбинированный* портфель, который теперь *случайный*, приобретает вид

$$(25)\quad \boldsymbol{G}^{cmb} = \sum\nolimits_{(i,j)\in M_0} g_{ij}^{cmb}\boldsymbol{D}_{ij} + \sum\nolimits_{i\in I} g_{\mathrm{X};i}^{cmb}\vartheta_{1;i}\boldsymbol{D}_{\mathrm{X};i} + \sum\nolimits_{j\in J} g_{\mathrm{Y};j}^{cmb}\vartheta_{2;j}\boldsymbol{D}_{\mathrm{Y};j}\ .$$

Во втором и третьем слагаемых суммирование должно вестись по множествам M_1 и M_2. Но по правилам замещения на множествах $M_{1;i}$, $i \in I$, и $M_{2;j}$, $j \in J$, веса инструментов постоянны, и потому оба суммирования сводятся к однократным.

С целью графической иллюстрации платежной функции в виде единой двумерной функции имеет смысл рассмотреть и упрощенную, хотя и нереализуемую на рынке, *идеалистичную* версию портфеля в эквивалентной по платежной функции и ценам форме двумерного портфеля с теми же весами

$$(26)\quad \boldsymbol{G}^{idl} = \sum\nolimits_{(i,j)\in M_0} g_{ij}^{cmb}\boldsymbol{D}_{ij} + \sum\nolimits_{i\in I} g_{\mathrm{X};i}^{cmb}\boldsymbol{M}_{\mathrm{X};i} + \sum\nolimits_{j\in J} g_{\mathrm{Y};j}^{cmb}\boldsymbol{M}_{\mathrm{Y};j}\ .$$

Платежными функциями базисных инструментов служат характеристические функции сценариев на соответствующих рынках:

$u_{ij}(x, y) = \pi(x, y; \boldsymbol{D}_{ij}),\ u_{\mathrm{X};i}(x) = \pi(x; \boldsymbol{D}_{\mathrm{X};i}),\ u_{\mathrm{Y};j}(y) = \pi(y; \boldsymbol{D}_{\mathrm{Y};j})$.

В этих обозначениях платежную функцию *идеалистичной* версии *комбинированного* портфеля можно представить в виде поверхности как функции двух переменных

(27) $\max\left(g_{ij}^{cmb} u_{ij}(x, y), g_{\mathrm{X};i}^{cmb} u_{\mathrm{X};i}(x), g_{\mathrm{Y};j}^{cmb} u_{\mathrm{Y};j}(y)\right),\ x \in \mathsf{X}, y \in \mathsf{Y}$.

Это представление как раз и применяется далее при построении графика доходов портфеля (25) в форме (26).

3.3. СХЕМА ФОРМИРОВАНИЯ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

В связи с усложнением объекта исследования имеет смысл формирование исходных данных для проведения вычислительных экспериментов и в иллюстративных целях подчинить систематизированному подходу. В работе предлагается методология выбора прогнозных и стоимостных распределений для теоретического рынка, позволяющая получать их полное аналитическое описание, удобное для задач с CC-VaR.

На квадрате $Q = [0, 1]\times[0, 1]$ задается равномерное распределение, которое затем слегка искажается введением корреляции в простейшем для целей анализа виде таким образом, чтобы оно осталось распределением и чтобы оба его маргинальных распределения сохраняли свойство равномерности на [0, 1]. Подобная конструкция, которую в эконометрике называют *копулой* [6], может использоваться для построения разнообразных семейств двумерных распределений.

Двумерные распределения для прогнозной и стоимостной мер подбираются в простом классе двумерных функций распределения, заданных на квадрате Q так, чтобы оба его маргинальных распределения были равномерными. Этим свойством обладают функции

(28) $\Phi(u, v) = uv\left(1 + 3\kappa(1-u)(1-v)\right),\ u, v \in [0, 1],\ |\kappa| \le 1/3$.

Очевидно, что именно коэффициент κ отвечает за наличие корреляции между компонентами двумерного распределения. Для простой функции (28) с *равномерными* маргинальными распределениями параметр κ как раз равен коэффициенту корреляции. При нарушении условия на κ в (28) плотность перестает удовлетворять требованию неотрицательности.

С помощью (28) можно получить широкий класс двумерных функций распределения, произвольно задавать значение параметра κ и пару одномерных функций распределения в качестве аргументов u и v. Так, из двух одномерных функций распределения строится двумерное распределение

$$(29)\quad \mathsf{F}(x,y)=\Phi\big(\mathsf{F}_\mathsf{X}(x),\mathsf{F}_\mathsf{Y}(y)\big)=$$

$$=\mathsf{F}_\mathsf{X}(x)\mathsf{F}_\mathsf{Y}(y)\Big(1+3\kappa\big(1-\mathsf{F}_\mathsf{X}(x)\big)\big(1-\mathsf{F}_\mathsf{Y}(y)\big)\Big),\ x\in\mathsf{X},\ y\in\mathsf{Y}.$$

Этот подход предлагается использовать в работе для задания как прогнозной, так и стоимостной функций распределения, причем для каждой координаты. В качестве них берутся функции бета-распределений, часто применяемые в статистике. Общее представление их плотности дается соотношениями

$$(30)\quad \beta(z;u,v)=z^{u-1}(1-z)^{v-1}\big/\mathrm{B}(u,v),\quad z\in[0,\,1),\ u,\ v>1,\ \text{где}$$

$$\mathrm{B}(u,v)=\int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}\,dx=\Gamma(u)\Gamma(v)\big/\Gamma(u+v),$$

$$\Gamma(u)=\int_0^\infty x^{u-1}\exp(-x)\,dx\ -$$

соответственно бета- и гамма-функции.

Они удобны для анализа: сосредоточены на интервале [0, 1), в нуле и единице обращаются в нуль, а подбором параметров легко приобретают желаемую форму. Однако при использовании (29) связанный с корреляцией параметр κ может уже не совпадать с результирующими коэффициентами корреляции, хотя, как правило, близок к ним.

4. Иллюстративный пример

Связующим звеном теоретических и сценарных рынков становятся инструментальные индикаторы сценариев. Их платежными функциями служат характеристические функции сценариев, и они играют на сценарных рынках роль образующих базис δ-инструментов теоретического рынка.

4.1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ СЦЕНАРНОГО РЫНКА

В дискретной модели непрерывные функции заменяются векторами и матрицами. При этом используются известные и очевидные формулы теории вероятности. Однако для получения дискретного аналога оптимизации при использовании формул (28) и (29) удобнее отправляться от плотностей участвующих в них распределений.

В иллюстративном примере бета-распределенными становятся маргинальные плотности распределения для двумерных функций распределения, описывающих прогнозные и стоимостные характеристики рынка #0. Имея в виду (30), полагаем

(31) $p_1(x) = \beta(x; 4{,}0; 3{,}0)$; $p_2(y) = \beta(y; 3{,}6; 2{,}7)$;

(32) $c_1(x) = \beta(x; 3{,}6; 2{,}7)$; $c_2(y) = \beta(y; 3{,}2; 2{,}4)$; $x, y \in [0, 1]$.

По каждой координате дисперсии распределений в (32) выше, чем в (31), а это подводит инвестора к осуществлению *продажи волатильности*.

В качестве исходных задаются векторы прогнозных и стоимостных сценарных вероятностей размерности $m = n = 30$ для обеих координат двумерного рынка #0. Получаются они надлежащим интегрированием функций (31) и (32) в пределах сценариев и обозначаются соответственно

(33) $\boldsymbol{p}_{b1}$, $\boldsymbol{p}_{b2}$, $\boldsymbol{c}_{b1}$, $\boldsymbol{c}_{b2}$.

Так, по первой координате (с переменной x) прогнозный вектор вероятностей сценариев $\boldsymbol{p}_{b1}$ определяется соотношением

$$\boldsymbol{p}_{b;1} = \left\{ p_{b;1;i} = \int_{S_i} p_1(x)\,dx,\ i \in I \right\},$$

где согласно (31) $p_1(x) = \beta(x; 4{,}0; 3{,}0)$.

Аналогично формируются прочие векторы из четверки (33).

Дискретным аналогом одномерных функций распределения служат ступенчатые функции, определяемые значениями в граничных точках сценариев. Эти значения образуют векторы размерности $m + 1$, $n + 1$, $m + 1$, $n + 1$ соответственно

(34) $\boldsymbol{p}_{t1}$, $\boldsymbol{p}_{t2}$, $\boldsymbol{c}_{t1}$, $\boldsymbol{c}_{t2}$.

Крайней левой граничной точке придается значение нуль. Для правой границы каждого сценария соответствующая компонента вектора равна сумме вероятностей всех сценариев, лежащих на графике левее данной границы. Так, для первого вектора из (34)

(35) $p_{t1;0} = 0, \quad p_{t1;i} = \sum_{l \le i} p_{b1;l}, \ i \in I$.

Так же образуются и остальные векторы из (34).

Формально в алгоритме преобразование (35) для $i \in I$ реализуется нижними треугольными матрицами. Для $\boldsymbol{p}_{t1}$ это

$\boldsymbol{T}_1 = \{t_{kl} = \{1,\ k \ge l;\ 0,\ k < l\},\quad k, l = 1, ..., m.\}$.

Использованием соотношения (29) и его дискретной интерпретацией из одномерных векторов (34) в качестве маргинальных с заданием κ_P и κ_C в качестве корреляционных параметров строятся прогнозная и стоимостная матрицы соответственно $\boldsymbol{P}_{F,0}$, $\boldsymbol{C}_{F,0}$ уже для двумерного сценарного рынка #0.

При этом используется операция *внешнего перемножения* $\boldsymbol{E}(\cdot,\cdot)$ двух векторов, необязательно одного размера, – дискретного аналога перемножения функций. Эту операцию можно представлять себе как умножение вектора-столбца на вектор-строку справа, возможно, разной длины, в результате чего получается матрица, необязательно квадратная. Формально, если $\boldsymbol{a} = \{a_i,\ i \in I\}$, $\boldsymbol{b} = \{b_j,\ j \in J\}$, то

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \{a_i \cdot b_j,\ i \in I,\ j \in J\}$.

Так получаются матрицы размером $(m + 1) \times (n + 1)$

(36) $\boldsymbol{P}_{F,0} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}_{t,1}, \boldsymbol{p}_{t,2})\ (1+3\kappa_P\ \boldsymbol{E}(1 - \boldsymbol{p}_{t,1}, 1 - \boldsymbol{p}_{t,2}))$,

(37) $\boldsymbol{C}_{F,0} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{c}_{t,1}, \boldsymbol{c}_{t,2})\ (1+3\kappa_C\ \boldsymbol{E}(1 - \boldsymbol{c}_{t,1}, 1 - \boldsymbol{c}_{t,2}))$

с компонентами $p_{F,0;ij}$, $c_{F,0;ij}$, $i \in \{0\} \cup I$, $j \in \{0\} \cup J$, соответственно. Индексация элементов этих матриц ведется от нуля, а не от традиционной единицы. Важно и то, что в этих формулах матрицы, получаемые *после* применения операции $\boldsymbol{E}(\cdot,\cdot)$, при раскрытии скобок перемножаются уже *поэлементно*.

Из сценарных функций распределения (36) и (37) стандартной процедурой образования вторых смешанных разностей находятся вероятности для двумерных сценариев – дискретный аналог двумерных плотностей для рынка #0. Они формируют матрицы размером $m \times n$

(38) $\boldsymbol{P}_{S,0} = \{p_{S,0;ij} = p_{F,0;i+1,j+1} - p_{F,0;i+1,j} - p_{F,0;i,j+1} + p_{F,0;ij},\ i \in I, j \in J\}$,

(39) $\boldsymbol{C}_{S,0} = \{c_{S,0;ij} = c_{F,0;i+1,j+1} - c_{F,0;i+1,j} - c_{F,0;i,j+1} + c_{F,0;ij},\ i \in I, j \in J\}$.

При переходе от (28) с равномерным распределением к (29) с бета-распределениями свойство неотрицательности плотности может нарушиться. Поэтому уместно проверить выполнение вероятностных свойств получаемых матриц. И при нарушении достаточно будет несколько уменьшить корреляционные параметры. В предлагаемом примере $\kappa_\mathrm{P} = 0{,}3$, $\kappa_\mathrm{C} = 0{,}25$.

Покомпонентным делением (38) на (39) находится важная для последующего применения процедуры Неймана – Пирсона матрица относительных доходов

$\boldsymbol{R}_{S,0} = \boldsymbol{P}_{S,0} / \boldsymbol{C}_{S,0}$.

В соответствии со свойствами копулы маргинальные для (38) и (39) векторы должны совпадать с соответствующими векторами (33), что можно установить и прямым расчетом.

Остается определиться с дискретным аналогом одномерных плотностей для рынков #X и #Y – вероятностными векторами, для которых используются обозначения $\boldsymbol{p}_{S,\mathrm{X}}$, $\boldsymbol{p}_{S,\mathrm{Y}}$, $\boldsymbol{c}_{S,\mathrm{X}}$, $\boldsymbol{c}_{S,\mathrm{Y}}$.

Как и в случае с (7), прогнозные векторы $\boldsymbol{p}_{S,\mathrm{X}}$, $\boldsymbol{p}_{S,\mathrm{Y}}$, должны совпадать с маргинальными для рынка #0, т.е.

$\boldsymbol{p}_{S,\mathrm{X}} = \boldsymbol{p}_{b1}$, $\boldsymbol{p}_{S,\mathrm{Y}} = \boldsymbol{p}_{b2}$.

Но стоимостные векторы $\boldsymbol{c}_{S,\mathrm{X}}$ и $\boldsymbol{c}_{S,\mathrm{Y}}$ в силу относительной независимости рынков могут отличаться от маргинальных для рынка #0. В примере они задаются правилами

(40) $\boldsymbol{c}_{S,\mathrm{X}} = \nu_\mathrm{X}\, \boldsymbol{c}_{b1} + (1 - \nu_\mathrm{X})\, \boldsymbol{\omega}_{b1}(2, 2)$,

(41) $\boldsymbol{c}_{S,\mathrm{Y}} = \nu_\mathrm{Y}\, \boldsymbol{c}_{b2} + (1 - \nu_\mathrm{Y})\, \boldsymbol{\omega}_{b2}(2, 2)$,

где $\nu_\mathrm{X} = \nu_\mathrm{Y} = 0{,}9$, а $\boldsymbol{\omega}_{b1}$ и $\boldsymbol{\omega}_{b2}$ – вероятностные векторы размерности m и n, получаемые аналогично векторам (33) из плотностей бета-распределений $\beta(x; 2{,}0; 2{,}0)$ и $\beta(y; 2{,}0; 2{,}0)$ соответственно.

Такие правила моделируют отличие векторов $\boldsymbol{c}_{S,\mathrm{X}}$, $\boldsymbol{c}_{S,\mathrm{Y}}$ для рынков #X, #Y от маргинальных для рынка #0 векторов $\boldsymbol{c}_{b1}$, $\boldsymbol{c}_{b2}$, притом с усилением свойства продажи волатильности. Кроме того, возможно и последующее введение параметров χ_X и χ_Y, отражающих средние уровни цен на одномерных рынках #X и #Y и однозначно связанных с *безрисковыми* относительными доходами r_X и r_Y (6) в модели:

(42) $\chi_\mathrm{X} = 1/r_\mathrm{X}$, $\chi_\mathrm{Y} = 1/r_\mathrm{Y}$.

Наконец, находятся относительные доходы

$\boldsymbol{\rho}_{S,\mathrm{X}} = \boldsymbol{p}_{S,\mathrm{X}} / \boldsymbol{c}_{S,\mathrm{X}}$, $\boldsymbol{\rho}_{S,\mathrm{Y}} = \boldsymbol{p}_{S,\mathrm{Y}} / \boldsymbol{c}_{S,\mathrm{Y}}$, и к ним применяется стандартный дискретный алгоритм. При этом принимается, что ф.р.п. $\phi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\varepsilon}^2$.

Громоздкость большинства получаемых при решении общей задачи агрегатов не позволяет приводить их в тексте. И потому ограничиваемся лишь некоторыми важными промежуточными и окончательными результатами.

Решение задачи *СВ* для рынков #0, #X, #Y по отдельности дает *записи* результатов (согласно (8)) соответственно

(43) $\boldsymbol{L}_0 = \langle 0{,}305686;\ 0{,}335018;\ 0{,}0959545\rangle$,

(44) $\boldsymbol{L}_\mathrm{X} = \langle 0{,}340419;\ 0{,}36442;\ 0{,}070503\rangle$,

(45) $\boldsymbol{L}_\mathrm{Y} = \langle 0{,}338448;\ 0{,}362834;\ 0{,}0720519\rangle$.

Эти характеристики решения интересны лишь в отношении сравнения с таковыми для комбинированных портфелей. Необходимыми для построения оптимального *комбинированного* портфеля и его формальных версий будут векторы относительных доходов для сценариев – одномерных и двумерных.

Следует также иметь в виду, что результаты (44), (45) для рынков #X, #Y получены по формулам (40) и (41), т.е. в предположении, что обе стоимостные плотности нормированы единицей. Но в рассматриваемой задаче эти рынки сохраняют самостоятельность и могут допускать свои нормировки.

Поэтому все стоимостные характеристики для этих рынков будут множиться на положительные коэффициенты χ_X и χ_Y (42). На них будут делиться все относительные доходы, и это повлечет изменение комбинированного портфеля и его итоговой доходности. Тем не менее *записи* результатов (44), (45) справедливы, но только при изначально заданных параметрах рынков #X, #Y, т.е. при $\chi_\mathrm{X} = \chi_\mathrm{Y} = 1$.

4.2. ПОСТРОЕНИЕ КОМБИНИРОВАННОГО ПОРТФЕЛЯ

Проведенная в предыдущих разделах работа подготовила почву для решения задачи *СВ* по нахождению оптимального по CC-VaR портфеля на тройственном рынке. Для придания универсальности решению и его зависимости от параметра χ без труда обнаруживаются изменения *записи* результатов, полученной при $\chi = 1$: инвестиционная сумма множится на χ, средний доход остается прежним, а доходность равна $(1 + y)/\chi - 1$.

В иллюстративном примере полагаем

(46) $\chi_X = 1{,}05$; $\chi_Y = 1{,}06$,

и тогда коррекция формул (44) и (45) дает:

(47) $\boldsymbol{L}_X = \langle 0{,}35744;\ 0{,}36442;\ 0{,}0195267\rangle$,

(48) $\boldsymbol{L}_Y = \langle 0{,}358755;\ 0{,}362834;\ 0{,}0113697\rangle$.

Построение комбинированного портфеля в задаче СВ.

Сначала комбинированный портфель строится для $w = 1$ на основе данных об относительных доходах, использованных при решении *задач СВ* для всех трех исходных рынков, но уже с непременным учетом (46). Для этого из соотношений (13)–(15) находятся множества M_k, $k = 0, 1, 2$, и по ним строится матрица замещений **A** (16). В ней 243 нулей, 322 единицы и 335 двоек.

Структуру матрицы и оптимального портфеля передает рис. 1 цветовым отображением матрицы **A**. В квадрате Q представлены все 30 × 30 = 900 двумерных (для рынка #0) сценариев. Серым цветом помечены 322 сценария, для которых наибольшие относительные доходы достигаются на рынке #X, черным – 335 сценариев с наибольшим относительным доходом на рынке #Y. Остаются непомеченными остальные 243 сценария с наибольшим относительным доходом на рынке #0.

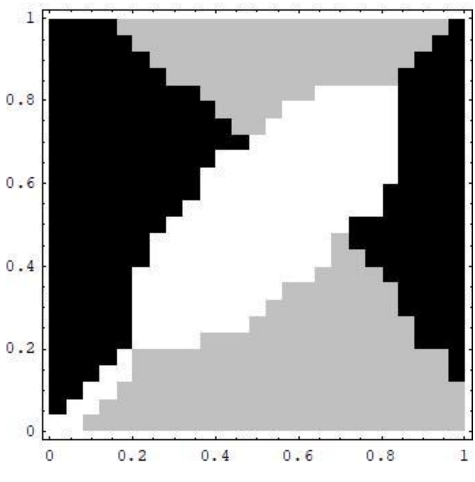

Рис. 1. Структура оптимального портфеля

Понятно, что с увеличением сценарной детализации размерность матрицы замещений **A** возрастает, и границы трех зон должны сглаживаться. При этом рисунок все точнее будет отображать *функцию* замещений для двумерного комбинированного теоретического δ-рынка [3].

Исходя из тройки матриц $\{\boldsymbol{C}_{S,0}, \boldsymbol{P}_{S,0}, \boldsymbol{R}_{S,0}\}$ операцией обнуления всех ее элементов (i, j), для которых согласно (16) $a_{ij} \neq 0, 1, 2$, строятся соответственно три тройки матриц $\{\boldsymbol{C}_{N,0}, \boldsymbol{P}_{N,0}, \boldsymbol{R}_{N,0}\}$, $\{\boldsymbol{C}_{N,\mathrm{X}}, \boldsymbol{P}_{N,\mathrm{X}}, \boldsymbol{R}_{N,\mathrm{X}}\}$, $\{\boldsymbol{C}_{N,\mathrm{Y}}, \boldsymbol{P}_{N,\mathrm{Y}}, \boldsymbol{R}_{N,\mathrm{Y}}\}$.

Затем для рынков #X, #Y вычисляются: 1) согласно вторым соотношениям в (23), (24) векторы $\boldsymbol{p}_{M,\mathrm{X}} = \{p_{M,\mathrm{X};i} = \mathsf{P}\{M_{1;i}\}, i \in I\}$, $\boldsymbol{p}_{M,\mathrm{Y}} = \{p_{M,\mathrm{Y};j} = \mathsf{P}\{M_{2;j}\}, j \in J\}$ суммарных вероятностей замещения; 2) по формулам (20), (21) векторы θ_X, θ_Y; 3) согласно первым соотношениям в (23), (24) векторы $\boldsymbol{c}_{M,\mathrm{X}}$, $\boldsymbol{c}_{M,\mathrm{Y}}$ и (iv) $\boldsymbol{\rho}_{M,\mathrm{X}}$, $\boldsymbol{\rho}_{M,\mathrm{Y}}$. При этом, если $p_{M,\mathrm{X};i} = 0$ для некоторого $i \in I$, то принимается также $c_{M,\mathrm{X};i} = 0$, $\rho_{M,\mathrm{X};i} = 0$; то же – для Y и $j \in J$.

Из всего перечисленного приведем лишь важные для процедуры рандомизации векторы биномиальных вероятностей, отражающие оптимальный состав комбинированного портфеля и степень вовлечения в него инструментов рынков #X, #Y:

$\boldsymbol{\theta}_\mathrm{X}$ = {0; 0; 0,000085; 0,00099; 0,0042; 0,0050; 0,0118; 0,0145; 0,0321; 0,0440; 0,0643; 0,1121; 0,1562; 0,1319; 0,1626; 0,1350; 0,1287; 0,1305; 0,1201; 0,1403; 0,1916; 0,1791; 0,1995; 0,1217; 0,0904; 0,0696; 0,0501; 0,0200; 0,0038; 0,00022},

$\boldsymbol{\theta}_\mathrm{Y}$ = {0; 0,000033; 0,00050; 0,0025; 0,0025; 0,0078; 0,0078; 0,0100; 0,0249; 0,0253; 0,0379; 0,0598; 0,1064; 0,1161; 0,0926; 0,1154; 0,0887; 0,1096; 0,1009; 0,1208; 0,1406; 0,1607; 0,1205; 0,0852; 0,0614; 0,0467; 0,0383; 0,0340; 0,0106; 0,0017}.

Далее матрицы $\boldsymbol{C}_{N,0}$, $\boldsymbol{P}_{N,0}$, $\boldsymbol{R}_{N,0}$ преобразуются лексикографически в векторы $\boldsymbol{c}_{M,0}$, $\boldsymbol{p}_{M,0}$, $\boldsymbol{\rho}_{M,0}$ соответственно. Из них формируются уже три комбинированных вектора $\boldsymbol{c}_{cmb}$, $\boldsymbol{p}_{cmb}$, $\boldsymbol{\rho}_{cmb}$ размерности $mn + m + n = 960$ каждый, притом конкатенацией троек $\{\boldsymbol{c}_{M,0}, \boldsymbol{c}_{M,\mathrm{X}}, \boldsymbol{c}_{M,\mathrm{Y}}\}$, $\{\boldsymbol{p}_{M,0}, \boldsymbol{p}_{M,\mathrm{X}}, \boldsymbol{p}_{M,\mathrm{Y}}\}$, $\{\boldsymbol{\rho}_{M,0}, \boldsymbol{\rho}_{M,\mathrm{X}}, \boldsymbol{\rho}_{M,\mathrm{Y}}\}$.

Наконец, применяется стандартный алгоритм оптимизации к тройке векторов $\{\boldsymbol{c}_{cmb}, \boldsymbol{p}_{cmb}, \boldsymbol{\rho}_{cmb}\}$ и находится вектор $\boldsymbol{g}_{cmb}$ весовых коэффициентов комбинированного портфеля размерности

$mn + m + n = 960$. Опуская громоздкие промежуточные результаты, приводим *запись* результатов

$\boldsymbol{L}_{cmb} = \langle 0{,}305701; 0{,}335898; 0{,}0987802 \rangle$.

Превышение доходности y_{cmb} (третий элемент) над доходностями в (43)–(45) и тем более в (47), (48), – естественное следствие привлечения возможностей одномерных рынков (даже при повышении стоимости их инструментария).

Использование суррогатного портфеля (17) в качестве средства проверки работы алгоритма при тех же условиях (и до включения итеративной процедуры) дает *запись* результатов

$\boldsymbol{L}_{srg} = \langle 0{,}304823; 0{,}335002; 0{,}0990064 \rangle$,

достаточно близкую к *записи* комбинированного портфеля.

Оптимальный комбинированный портфель формируется разделением вектора $\boldsymbol{g}_{cmb}$ на три вектора $\boldsymbol{g}_{cmb,0}$, $\boldsymbol{g}_{cmb,\mathrm{X}}$, $\boldsymbol{g}_{cmb,\mathrm{Y}}$. При этом первый из них вновь интерпретируется как матрица.

4.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ CG – ИТЕРАТИВНАЯ ПРОЦЕДУРА

Все проведенные до сих пор вычисления были связаны с задачей *CB*. Ее решение в рамках предстоящей итеративной процедуры для задачи *CG* может рассматриваться как начальное приближение. В этой процедуре существенная роль отводится ф.р.п. инвестора. Но в части (11) программы, которая завершается вычислением вектора вероятностей $\boldsymbol{\varepsilon}$, она вовсе не участвует, и потому предстоящие итерации не должны затрагивать этой части. В частности, не меняется матрица $\mathbf{A}$, устанавливающая рандомизированный базис портфеля, и потому структура комбинированного портфеля не меняется. А изменения коснутся лишь векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{g}$ в части (12) программы. Итерации проводятся по масштабному параметру w, определяющему конкретный вид ф.р.п., а критерий CC-VaR принимает форму (2).

Применением метода Ньютона для каждого значения параметра из возникающей при этом последовательности поиска решения находятся векторы $\boldsymbol{b}_{cmb} = \phi(\boldsymbol{\varepsilon}_{cmb}; w)$, $\boldsymbol{g}_{cmb} = \boldsymbol{b}_{cmb}(\boldsymbol{\eta}_{cmb})$, а также компоненты *записи* $A_{cmb} = (\boldsymbol{g}_{cmb}, \boldsymbol{c}_{cmb})$, $R_{cmb} = (\boldsymbol{g}_{cmb}, \boldsymbol{p}_{cmb})$, $y_{cmb} = R_{cmb}/A_{cmb} - 1$. Процесс завершается по достижении уровня $A_{cmb} = 1$. Такое значение инвестиционной суммы реализуется при $w = 2{,}5855$, а полная *запись* результатов составит

$\boldsymbol{L}_{cmb} = \langle 1{,}0;\ 1{,}09081;\ 0{,}0908083 \rangle$.

Естественным при росте масштабного параметра w от единицы до 2,5855 выглядит падение доходности инвестиции – посредством ф.р.п. инвестор демонстрирует снижение своей готовности рисковать при возрастании масштаба инвестиции.

График платежной функции комбинированного портфеля приводится в идеалистичной версии (26) с использованием (27) на рис. 2.

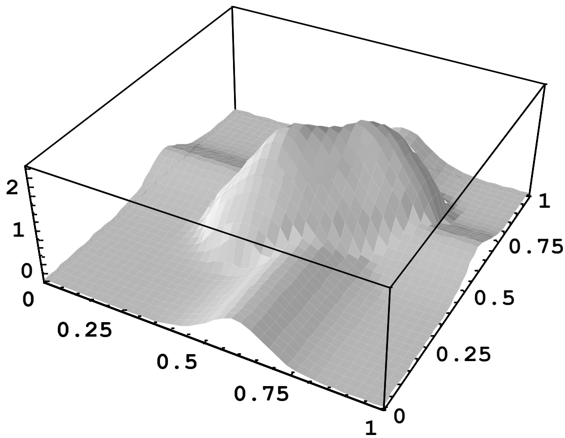

Рис. 2. Доходы оптимального комбинированного портфеля (*в идеалистичной версии*)

Уменьшение параметров χ_X и χ_Y (вплоть до значений, меньших единицы) по понятным причинам приводит к росту весов компонентных портфелей #X и #Y в комбинированном портфеле, и наоборот. А конкретный выбор параметров определяется лишь эстетическим восприятием картинки графика.

Для большей схожести с теоретической (гладкой) поверхностью при построении графика вместо индикаторов в качестве базисных инструментов использовались баттерфляи. Хотя это не совсем логически обосновано, но, понятно, не наносит ущерба для достоверности результатов. Для крайних сценариев базисными инструментами фактически становятся спрэды – так называемые усеченные баттерфляи – с платежными функциями

$\max(0, \min(1, 1 + (s - z)/h))$ и $\max(0, \min(1, 1 + (z - s)/h))$ слева и справа соответственно, где z – координатная переменная, s – центр сценария, h – длина сценария. Для внутренних сценариев платежной функцией (уже полных баттерфляев) служит функция $\max(0, 1 - |z - s|/h)$).

5. Заключение

В работе предложен подход к оптимизации поведения инвестора, придерживающегося критерия CC-VaR, на совокупности финансовых рынков разных размерностей. Приводится правило замещения базисных инструментов двумерного рынка более доходными инструментами одномерных рынков.

Для формирования исходных данных применяется метод, позволяющий получать их полное аналитическое описание, удобное для проведения вычислительных экспериментов. Предлагается итеративная процедура для решения задача *CG*, в которой задана начальная сумма инвестиции, а рисковые предпочтения инвестора зависят от масштаба инвестиции. Находится (оптимальное) значение масштабного параметра и регулярный комбинированный портфель, средний доход которого максимален при выполнении критерия CC-VaR.

Для целей реализуемости правил замещения рынков применяется рандомизация. Проведенные для сценарных рынков расчеты с бета-распределенными прогнозными и стоимостными характеристиками задачи и построенные графики свидетельствуют об эффективности модели.

С целью подтверждения большей универсальности предложенной в работе методологии исследования проблемы имело бы смысл применить ее к иным более сложным совокупностям взаимосвязанных рынков разных размерностей. Хотя, понятно, даже графическое отображение результатов при этом должно столкнуться с повышенными техническими трудностями.

Литература

1. АГАСАНДЯН Г.А. *Континуальный критерий VaR и оптимальный портфель инвестора* // Управление большими системами. – 2018. – Вып. 73. – С. 6–26.
2. АГАСАНДЯН Г.А. *Континуальный критерий VaR на сценарных рынках* // Информатика и ее применения. – М.: ИПИ ФИЦ ИУ РАН, 2018. – Т. 12. Вып. 1. – С. 32–40.
3. АГАСАНДЯН Г.А. *Теоретические основы оптимизации по CC-VaR на совокупности рынков* // Информатика и ее применения. – М.: ИПИ ФИЦ ИУ РАН, 2019. – Т. 13. Вып. 4. – С. 38–43.
4. АГАСАНДЯН Г.А. *Вычислительные аспекты применения CC–VaR на совокупности рынков* // Информатика и ее применения. – М.: ИПИ ФИЦ ИУ РАН, 2020. – Т. 14. Вып. 3. – С. 62–70.
5. АГАСАНДЯН Г.А. *Многомерные рынки опционов и оптимизация по CC-VaR* // Управление большими системами. – 2020. – Вып. 88. – С. 5–25.
6. БЛАГОВЕЩЕНСКИЙ Ю.Н. *Основные элементы теории копул* // Прикладная эконометрика. – 2012. – Т. 26(2). – С. 113–130.
7. КРАМЕР Г. *Математические методы статистики*. – М.: Наука, 1975. –750 с. (Перевод с англ.: Cramer H. Mathematical methods of statistics. – Princeton University Press, 1946.)

CONTINUOUS VAR-CRITERION AND INVESTOR'S OPTIMAL PORTFOLIO

Gennady Agasandyan, Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow, Doctor of Science, leading fellow (agasand17@yandex.ru).

Abstract: The work continues studying problems of using the continuous VaR-criterion (CC-VaR) in financial markets. The application of CC-VaR in a collection of one two-dimensional and two one-dimensional theoretical markets that are partly mutually connected by their underliers is concerned. The construction of the combined portfolio that is founded on misbalance in returns relative between markets with maintaining optimality on CC-VaR is submitted. The optimal com-

bined portfolio with three components is constructed from basis instruments of all markets. The feasibility of the solution obtained is based on ideas of randomizing portfolio composition. The complication of the object investigated motivates applying a special econometric approach that allows the full analytical description of the object convenient for computations is used. Unlike former authors works that solved the problem CB very fruitful for theoretical investigations, here the more ordinary problem CG with the given initial investment amount and risk preferences functions depended on scale parameter is solved. The parameter value and the regular combined portfolio that achieves the maximum of the average income with fulfilling the CC-VaR need to be found. The constructions suggested are tested by an example with beta-distributed characteristics of the problem. Also an idealistic version of the combine portfolio that allows plotting two-dimension diagram for incarnating an idea of combining portfolios of different dimensions is constructed.

Keywords: underliers, continuous VaR-criterion (CC–VaR), risk preferences function (r.f.p.), forecast and cost densities, returns relative function, Newman-Pearson procedure, forecast and cost functions, randomization, combine portfolio, idealistic portfolio.

УДК 519.685
ББК 22.18
DOI: 10.25728/ubs.2022.98.2

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Ф.И. Ерешко.

Поступила в редакцию 13.03.2022.
Опубликована 31.07.2022.