ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ БИНАРНОГО КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ. ЧАСТЬ 1

Бреер В. В.[1]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Рассматриваются теоретико-игровые модели порогового бинарного коллективного поведения, характеризующие социальное взаимодействие между агентами. Для бинарных моделей функцией, характеризующей предпочтения игроков и эквивалентной целевой функции (ЦФ), является индикатор выбора. Знак индикатора выбора, а не максимизация ЦФ, здесь характеризует рациональное поведение агента. С помощью индикатора выбора водится оператор рационального поведения, являющийся автоморфизмом на множестве ситуаций, и доказывается утверждение о том, что его неподвижная точка является равновесием Нэша (РН). Также доказывается, что любая бинарная теоретико-игровая модель эквивалентна некоторой пороговой модели. Примеры из работ Т. Шеллинга (две группы агентов) и М. Грановеттера (одна группа агентов) обобщаются на коллектив, состоящий из произвольного числа групп, и для этой модели доказываются утверждения о нахождении РН через функцию распределения порогов агентов. Исследуются условия существования и число (а также максимально возможное число) РН, а также их структура. Найдены Парето-эффективные равновесия. Изучены модели индикаторного поведения и доказана сходимость его рекуррентной процедуры к одному из РН.

Ключевые слова: бинарное коллективное поведение, социальное взаимодействие, модель Грановеттера, модель Шеллинга, теоретико-игровая модель, равновесие Нэша, индикаторное поведение, неподвижная точка оператора.

1. Введение

В этой серии статей изучаются специфические свойства стратегий бинарного коллективного поведения (БКП), которые отличаются от свойств других видов стратегий. В первой части за основу взяты две наиболее влиятельные на развитие *моделей*

[1] *Владимир Валентинович Бреер, к.т.н.* (*breer@live.ru*).

социального поведения работы:

- М. Грановеттера [10], которая стала отправной точкой для дальнейшей классификации порогового социального поведения (Threshold Models) [6, 16], а также для приложений этой модели к внедрению новых технологий [11], потребительскому спросу [12], сегрегации [13] и проблемам коллективного выбора [14].

- Т. Шеллинга [15], где развиты и обобщены модели ограниченного окружения на такие с первого взгляда разнородные примеры, как коллективное поведение (посещение факультетских семинаров, волейбольных матчей, неосторожный переход улицы, присоединение к аплодисментам), ухудшение качества окружения в районе проживания, сегрегация, решение суда без предварительного разбирательства, потеря доверия банкам, голосование, политические революции, дорожные знаки и переход на летнее время. В дальнейшем развитие получила в основном модель пространственного соседства, в имитационном моделировании найдя применение в клеточных автоматах агентных моделей [4, 8, 9] и др. В работе [17] была сделана попытка объединить обе модели Шеллинга, используя методы статфизики и марковских процессов. В статье [7] рассматривается модификация моделей Шеллинга на графах. Модель ограниченного окружения в динамике исследуется в работе [5].

Из дальнейшего изложения становится понятным, что эти две базисные модели относятся к одному классу пороговых моделей социального БКП. Классификация может быть произведена исходя из свойств некоторого оператора рационального поведения (ОРП).

Так, равновесие Нэша (РН) в изложении формулируется в эквивалентных терминах неподвижных точек ОРП. Для построения этого оператора в разделе 2 вводится функция, которая называется *индикатором выбора*. Последний обладает рядом таких свойств, что с его помощью можно сформулировать условия **всех**

видов равновесия в чистых стратегиях теоретико-игровой модели БКП. Далее с помощью индикатора выбора конструируется оператор, который совместно со своими модификациями является ОРП в том смысле, что его неподвижная точка является РН. Эти модификации будут использованы в дальнейшем для описания конкретных моделей БКП.

Важным фактом, установленным в разделе 2, является то, что БКП эквивалентно некоторому **пороговому** поведению (определение 8, утверждение 3). Таким образом, говоря о БКП всегда можно иметь в виду пороговое поведение.

Раздел 3 начинается с двух фундаментальных примеров М. Грановеттера [10] и Т. Шеллинга [15, стр.64]. Как показано далее в этом разделе, теоретико-игровые модели, построенные для этих примеров, а также их обобщения на произвольное количество групп в коллективе, могут быть изучены с помощью *комонотонного* оператора, свойства которого будут приведены в последующих частях работы. Примеры, которые описываются с помощью моделей БКП с этим типом оператора, являются примерами **социального поведения**: конформного (для одной группы агентов) и нетолерантного – предрассудков (для двух групп агентов).

Как известно, модели примеров 1 и 2 являются пороговыми, поэтому строятся пороговые целевые функции (18) и индикаторы выбора (20). Далее вводится очень важный объект – эмпирическая функция распределения порогов агентов (21)[2].

С помощью функции распределения порогов доказывается теорема 1 о выражении РН через решения системы уравнений для эмпирической функции распределения (22). Причём решения находятся в классах эквивалентности ситуаций, а для РН класс эквивалентности состоит из одного элемента (следствие 1). Приводятся способы решений системы уравнений (утверждение 4) и структуры РН (следствие 2). В утверждении 5 изучается признак эффективности по Парето (определение 11) для социального

[2] *Функция распределения порогов является центральным объектом анализа положений динамического равновесия для М. Грановеттера и Т. Шеллинга.*

поведения.

В подразделе 3.1 разработанная теория прилагается к примерам конформности М. Грановеттера (коллектив из одного типа агентов) и предрассудков Т. Шеллинга (коллектив из двух типов агентов). Рассматриваются условия существования РН: всегда существуют по крайней мере два РН. Дополнительно получены результаты об индикаторном поведении: соответствующие итерационные процедуры сходятся к одному из РН за конечное число шагов (теоремы 2 и 3).

В заключении подведены итоги и перечислены перспективные направления дальнейших исследований.

2. Теоретико-игровая модель БКП

Для описания теоретико-игровой модели БКП будем считать, что каждый игрок $i \in I$, где I – конечное множество игроков, имеет возможность осуществить *бинарный выбор* из множества своих *стратегий* $\Omega_i = \{0, 1\} \ni \omega_i$. Множество ситуаций будем обозначать через $\Omega \ni \omega$, а множество обстановок для игрока $i \in I$ – через $\Omega_{-i} \ni \omega_{-i}$.

Для того чтобы определить поведение агента как самостоятельно и рационально действующего элемента коллектива (активного агента), предполагается, что каждому агенту $i \in I$ соответствует его *целевая функция* $u_i : \Omega_i \times \Omega_{-i} \to \mathbb{R}$, в которой он может выбирать свою стратегию из $\omega_i \in \Omega_i$ для обстановки $\omega_{-i} \in \Omega_{-i}$. Осуществляя выбор *рационально*, агент максимизирует целевую функцию, иными словами выбирает стратегию (на языке теории игр *чистую стратегию*) из так называемого *множества наилучших ответов* $BR_i(\omega_{-i}) = \mathrm{Argmax}_{\omega_i \in \Omega_i} u_i(\omega_i, \omega_{-i}) \subset \Omega_i$.

Для бинарного поведения вместо целевой функции имеется возможность ввести следующую функцию, свойства которой описаны далее.

Определение 1. *Функцию $s_i : \Omega \to \mathbb{R}$, определяемую*

$$s_i(\omega) = s_i(\omega_i, \omega_{-i}) \triangleq u_i(\omega_i, \omega_{-i}) - u_i(\overline{\omega}_i, \omega_{-i}), \tag{1}$$

*назовем **индикатором выбора** агента $i \in I$.*

Из (1) и в силу того, что $\overline{\overline{\omega}}_i = \omega_i$, легко видеть, что индикатор выбора агента $i \in I$ обладает следующим свойством *симметрии* относительно *«собственной переменной»* ω_i, а именно, альтернативный выбор агента $i \in I$ приводит к противоположному значению индикатора выбора:

$$s_i\left(\omega_i, \omega_{-i}\right) = -s_i\left(\overline{\omega}_i, \omega_{-i}\right). \tag{2}$$

Так как агент рационален, то если $s_i\left(\omega_i, \omega_{-i}\right) > 0$, агент выбирает стратегию ω_i, иначе если $s_i\left(\omega_i, \omega_{-i}\right) < 0$, то по симметрии (2) он выбирает $\overline{\omega}_i$. При $s_i\left(\omega_i, \omega_{-i}\right) = 0$ ни одна из стратегий агента $i \in I$ не является *предпочтительной* для него в данной обстановке. Таким образом, в отличие от целевой функции, максимизация которой приводит к моделированию рационального поведения, *знак индикатора выбора* указывает на предпочтительную стратегию игрока в данной обстановке. Такая эквивалентность, очевидно, возможна только в случае бинарной стратегии выбора.

Перейдем к исследованию равновесий игры $\langle \Omega, \{s_i\}_{i \in I}, i \in I \rangle$, причём понятия и определения, связанные с различными типами равновесий, сформулируем, используя индикатор выбора (1), а не целевую функцию. Классические определения с использованием целевой функции можно найти в [1, 2].

<u>Определение 2.</u> *Стратегия $\omega_i \in \Omega_i$ называется **строго доминируемой** стратегией игрока $i \in I$, если справедливо неравенство*

$$s_i(\omega_i, \omega_{-i}) < 0, \forall \omega_{-i} \in \Omega_{-i}. \tag{3}$$

<u>Определение 3.</u> *Стратегия $\omega_i \in \Omega_i$ называется **строго недоминируемой** стратегией игрока $i \in I$, если найдется обстановка $\omega_{-i} \in \Omega_{-i}$ такая, что справедливо неравенство*

$$s_i(\omega_i, \omega_{-i}) \geqslant 0. \tag{4}$$

Строго доминируемые стратегии можно последовательно убирать из рассмотрения ситуаций игры, пока не останутся только строго недоминируемые (см., например, [1]).

Введем оператор $\varphi = \{\varphi_i\}_{i \in I}$ такой, что для каждого игрока $i \in I$ его проекция является следующим отображением

$\varphi_i : \Omega \to \Omega_i$:

$$\varphi_i(\omega) = \begin{cases} \omega_i, \text{ если } s_i(\omega) \geqslant 0, \\ \overline{\omega}_i \text{ иначе}, \end{cases} \tag{5}$$

где $\omega_i, \overline{\omega}_i \in \Omega_i = \{0, 1\}$.

Определение 4. *Стратегия ω_i^d называется **доминантной** стратегией игрока i, если справедливо неравенство*

$$s_i(\omega_i^d, \omega_{-i}) \geqslant 0, \forall \omega_{-i} \in \Omega_{-i}, \tag{6}$$

Определение 5. *Если у каждого игрока i существует доминантная стратегия ω_i^d, то соответствующая ситуация ω^d, состоящая из этих стратегий, называется равновесием в доминантных стратегиях (РДС).*

***Утверждение* 1.** *Если целевая функция допускает представление*

$$u_i(\omega_i, \omega_{-i}) = u_i^{(1)}(\omega_i) + u_i^{(2)}(\omega_{-i}), \forall i \in I, \tag{7}$$

*то РДС ω^d всегда **существует** и определяется неподвижной точкой оператора* (5)

$$\varphi(\omega^d) = \omega^d. \tag{8}$$

Доказательство.

Из (7) следует, что $s_i(\omega_i, \omega_{-i}) = u_i^{(1)}(\omega_i) - u_i^{(1)}(\overline{\omega_i})$. По свойству индикатора выбора (2) неподвижная точка (8) оператора (5) существует и (6) будет выполнено для всех $i \in I$.

Определение 6. ***Равновесием Нэша** (РН) в игре H назовем профиль стратегий $\omega^* \in \Omega$, для которого справедливо неравенство*

$$u_i(\omega_i^*, \omega_{-i}^*) - u_i(\overline{\omega_i^*}, \omega_{-i}^*) = s_i(\omega^*) \geqslant 0, \quad \forall i \in I. \tag{9}$$

Характеризация РН для БКП, рассматриваемая в следующем почти очевидном утверждении, имеет целью доказать, что неподвижные точки оператора $\varphi = \{\varphi_i\}_{i \in I}$ (5), совпадают с РН.

***Утверждение* 2.** *Ситуация $\omega^* \in \Omega$ является РН (определение 6) если и только если она является неподвижной точкой для ОРП $\varphi = \{\varphi_i\}_{i \in I}$.*

Доказательство. Пусть $\omega^* \in \Omega$ является РН, т.е. по определению 6 $s_i(\omega^*) \geqslant 0$ $\forall i \in I$, тогда из (5) следует $\varphi(\omega^*) = \omega^*$.

Обратно, пусть $\varphi(\omega^*) = \omega^*$, тогда из (5) с необходимостью следует (9).

Оператор (5) будем далее называть **оператором рационального поведения (ОРП)**.

Для конкретных моделей, описанных далее, проекции ОРП $\varphi = \{\varphi_i\}_{i\in I}$ нужно модифицировать, при этом утверждение 2 остаётся в силе для этих модифицированных операторов. Сделаем следующее допущение, которое должно быть выполнено, если все игроки участвуют в игре, а именно, будем считать, что для любого агента i существует хотя бы одна обстановка с *предпочтительной* стратегией:

$$\forall i \in I \; \exists \omega^{(i)} \in \Omega : s_i\left(\omega^{(i)}\right) \neq 0. \tag{10}$$

Очевидно, что если для игрока $i \in I$ $s_i(\omega) = 0$ для всех $\omega \in \Omega$, то этот игрок не участвует в игре.

Абсолютное значение $|s_i\left(\omega_i, \omega_{-i}\right)|$ показывает, на какую величину различаются значения *целевой функции* для двух стратегий $\{\omega_i, \overline{\omega}_i\}$ при фиксированной обстановке $\omega_{-i} \in \Omega_{-i}$. Поэтому величину $|s_i\left(\omega_i, \omega_{-i}\right)|$ назовем *значимостью выбора* для игрока $i \in I$.

Определение 7. Для агента i величина

$$\varepsilon_i \triangleq \inf_{\{\omega_{-i}: s_i(\omega_i, \omega_{-i}) \neq 0\}} |s_i\left(\omega_i, \omega_{-i}\right)| \tag{11}$$

*называется **наименьшей ненулевой значимостью выбора**.*

Согласно сделанному предположению (10), множество $\{\omega \in \Omega : s_i(\omega) \neq 0\}$ не пусто для любого i, поэтому всегда в (11) существует $\varepsilon_i > 0 \; \forall i \in I$. Кроме того, несмотря на то, что минимум в (11) берётся по обстановкам, ε_i не зависит от ω_i в силу равенства (2). Таким образом, это число, характеризующее игрока $i \in I$.

***Замечание* 1.** Из определения 7 следует, что значения индикатора выбора игрока i (1) либо равны нулю, либо лежат вне интервала $(-\varepsilon_i, \varepsilon_i)$.

Теперь проведем две модификации проекций ОРП следующим образом:

$$\widetilde{\varphi}_i(\omega) = \begin{cases} \omega_i, \text{ если } s_i(\omega) > -\varepsilon_i, \\ \overline{\omega}_i \text{ иначе;} \end{cases} \tag{12}$$

$$\widehat{\varphi}_i(\omega) = \begin{cases} \omega_i, \text{ если } s_i(\omega) \geqslant \varepsilon_i, \\ \overline{\omega}_i \text{ иначе.} \end{cases} \tag{13}$$

Для операторов $\widetilde{\varphi} : \Omega \to \Omega$, $\widetilde{\varphi} = \{\widetilde{\varphi}_i\}_{i \in I}$ и $\widehat{\varphi} : \Omega \to \Omega$, $\widehat{\varphi} = \{\widehat{\varphi}_i\}_{i \in I}$, определяемых (12) и (13) соответственно, сформулируем следующие леммы об эквивалентности их неподвижных точек РН. Эти леммы будем использовать в следующих частях данной работы.

<u>Лемма 1.</u> *Профиль стратегий ω^* является РН (определение 6) если и только если $\widetilde{\varphi}(\omega^*) = \omega^*$.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{\varphi}(\omega^*) = \omega^*$, т.е. $\forall i \in I \ \widetilde{\varphi}_i(\omega^*) = \omega_i^*$. Согласно (12) $\forall i \in I \ s_i(\omega) > -\varepsilon_i$, из чего следует неравенство $s_i(\omega^*) \geqslant 0$, т.е. ω^* является РН.

Обратно, предположим противное – $\widetilde{\varphi}(\omega^*) \neq \omega^*$. То есть существует $i_0 \in I$, для которого $\widetilde{\varphi}_{i_0}(\omega^*) = \overline{\omega^*}_{i_0}$. Согласно (12) $s_{i_0}(\omega^*) \leqslant -\varepsilon_{i_0} < 0$, из чего следует, что ω^* не является РН.

Доказательство следует из «принципа от противного».

<u>Лемма 2.</u> *Пусть $\forall i \in I$ выполнено $s_i(\omega) \neq 0 \ \forall \omega \in \Omega$, т.е. игроки имеют предпочтительную стратегию для любой обстановки. Тогда профиль стратегий ω^* является РН (определение 6) если и только если $\widehat{\varphi}(\omega^*) = \omega^*$.*

Доказательство. Пусть $\widehat{\varphi}(\omega^*) = \omega^*$, т.е. $\forall i \in I \ \widehat{\varphi}_i(\omega^*) = \omega_i^*$. Согласно (13) $\forall i \in I \ s_i(\omega) \geqslant \varepsilon_i$, из чего следует неравенство $s_i(\omega^*) > 0$, т.е. ω^* является РН.

Обратно, предположим противное – $\widehat{\varphi}(\omega^*) \neq \omega^*$. То есть существует $i_0 \in I$, для которого $\widehat{\varphi}_{i_0}(\omega^*) = \overline{\omega^*}_{i_0}$. Согласно (13) $s_{i_0}(\omega^*) < \varepsilon_{i_0}$. Так как $\forall i \in I$ выполнено $s_i(\omega) \neq 0 \ \forall \omega \in \Omega$ и в силу замечания 1 справедливо неравенство $s_{i_0}(\omega^*) < 0$, из чего следует, что ω^* не является РН.

Доказательство следует из «принципа от противного».

Целевую функцию игрока в модели БКП всегда можно переписать в следующем виде:

(14) $$u_i\left(\omega_i, \omega_{-i}\right) = u_i\left(0, \omega_{-i}\right)\left(1 - \omega_i\right) + u_i\left(1, \omega_{-i}\right)\omega_i,$$

где игрок проявляет рациональное поведение максимизацией целевой функции путём выбора им соответствующей стратегии $\omega_i \in \{0, 1\}$ для фиксированной обстановки ω_{-i}.

Определение 8. *Пороговым поведением будем назвать рациональное поведение игрока, при котором в* (14) *выполнено* $u_i\left(0, \omega_{-i}\right) = const$ *или* $u_i\left(1, \omega_{-i}\right) = const$.

Далее для определённости будем считать, что $u_i\left(0, \omega_{-i}\right) = const$. Результаты справедливы, если в её первом аргументе 0 заменить на 1.

***Утверждение* 3.** *Рациональное бинарное коллективное поведение всегда эквивалентно (в смысле достижения максимумов) некоторому пороговому поведению.*

Доказательство. Пусть бинарное поведение задано целевой функцией (14). Обозначим через $t_i = \min\limits_{\omega_{-i}} u_i\left(0, \omega_{-i}\right)$ и $\tilde{u}_i\left(0, \omega_{-i}\right) = u_i\left(0, \omega_{-i}\right) - t_i, i \in I$. Тогда (14) можно переписать в следующем виде:

(15) $$u_i\left(\omega_i, \omega_{-i}\right) = \left(\tilde{u}_i\left(0, \omega_{-i}\right) + t_i\right)\left(1 - \omega_i\right) + u_i\left(1, \omega_{-i}\right)\omega_i.$$

Введем целевую функцию порогового поведения:

(16) $$\hat{u}_i\left(\omega_i, \omega_{-i}\right) = t_i(1 - \omega_i) + \hat{u}_i(1, \omega_{-i})\omega_i,$$

где $\hat{u}_i(1, \omega_{-i}) = u_i\left(1, \omega_{-i}\right) - \tilde{u}_i\left(0, \omega_{-i}\right)$.

Те обстановки, на которых (15) и (16) достигают максимумов, совпадают.

Исходя из утверждения 3 будем считать, что модели БКП и *пороговые* модели БКП эквивалентны и индикатор выбора (1), применяя (16), можно переписать в следующем виде:

(17) $$s_i\left(\omega_i, \omega_{-i}\right) = t_i(1 - 2\omega_i) + u_i^t(1, \omega_{-i})(2\omega_i - 1).$$

В следующих разделах рассматриваются конкретные модели БКП, которые характеризуют социальное, экономическое и социально–экономическое поведение.

3. Социальное пороговое БКП

В этом разделе будем рассматривать два типа социального поведения: конформное и нетолерантное. **Конформностью** в социальной психологии называют изменение поведения индивида, происходящее в результате реального или представляемого влияния со стороны других людей [3]. **Нетолерантность** очевидно связана с понятием **предрассудка**, которым в социальной психологии называют враждебное или негативное отношение к людям определённой группы, основанное только на их принадлежности к этой группе (см. [3]). Основной причиной этого поведения является свойство человеческого мозга некритично создавать категории, в данном случае – стереотипы.

Социальное бинарное коллективное поведение проиллюстрируем с помощью следующих примеров. Первый пример описывает конформное пороговое БКП в группе.

Пример 1 Митинг и беспорядки [10]**.** Происходит митинг, который может перерасти в беспорядки. Чем больше агентов участвует в беспорядках, тем меньше вероятность индивидуального наказания агента со стороны властей за его противозаконные действия. Соответственно, у каждого агента есть выбор, участвовать или не участвовать в беспорядках, исходя из его индивидуального представления о минимальном количестве других агентов, участвующих в них. Конечно, могут быть и организаторы беспорядков, которые пытаются их инициировать личным примером или видимостью его. С другой стороны, есть агенты, которые не будут участвовать в беспорядках, какими бы массовыми они ни были. ●

Второй пример описывает нетолерантное БКП в двух группах.

Пример 2 Недружественное соседство [15], стр.64**.** В городском районе потенциально могут проживать две группы агентов, настроенные *недружественно* друг к другу. Каждый агент может терпеть определённую разницу между числом соседей своей и чужой групп. Соответственно, у агентов есть выбор, который состоит в решении находиться или нет в этом районе в зависимости от этой индивидуально воспринимаемой разницы. Существуют совершенно нетерпимые к противоположной группе агенты, которые не будут проживать в районе даже при одном агенте из чужой группы. С другой стороны, есть такие агенты, которые полностью толерантны и будут здесь проживать независимо от количества агентов другой группы. •

Пусть множество игроков I разделено на L *непересекающихся* подмножеств – групп I_l, где $1 \leqslant L \leqslant |I|$, $l = \overline{1,L}$. Число агентов в группе $l = \overline{1,L}$ обозначим через $|I_l| \geqslant 1$.

Для *идентификации* игроков, их целевых функций, стратегий и прочих параметров, связанных с игроками, будем использовать систему двойной идентификации *по группе*, к которой принадлежит игрок и по *его номеру в этой группе*. Выбор агента i из группы l как и в предыдущем разделе обозначим через $\omega_{li} \in \Omega_{li}$, $i \in I_l$, $l = \overline{1,L}$. Так как множество бинарных стратегий не меняется от игрока к игроку, то для удобства примем $\Omega_{li} = \{0,1\}$, в котором 1 обозначает действие: в примере 1 – участие в беспорядках, в примере 2 – проживание в районе, а 0 – соответствующее противоположное действие.

Количество агентов в группе l, сделавших выбор $\omega_{li} = 1$, $i \in I_l$, обозначим через $m_l = \sum_{i=1}^{|I_l|} \omega_i$, *количество остальных агентов* кроме i в группе l, сделавших выбор $\omega_{lj} = 1, j \in I_l$, $j \neq i$, обозначим через $m_{l\setminus i} = \sum_{\{j \in I_l : j \neq i\}} \omega_j$, а *количество агентов из других групп*, сделавших выбор $\omega_{l'j} = 1, j \in I_{l'}$, $l' = \overline{1,L}$, $l' \neq l$, обозначим через $m_{-l} = \sum_{\{l' = \overline{1,L} : l' \neq l\}} m_{l'}$.

Как следует из примеров выше, выбор агента i из группы $l = \overline{1,L}$, $i \in I_l$, с одной стороны, зависит от *разности* $m_{l\setminus i} - m_{-l}$ между количеством агентов «своей» и «чужих» групп[3], сделавших одинаковый выбор, обозначаемый[4] $\omega_{li} = 1$, и своего *порога*, с другой. Значения *разности* $m_{l\setminus i} - m_{-l}$ и *порога* сравниваются

[3] *В примере 1 «чужих» групп нет, в примере 2 – одна «чужая» группа.*

[4] *То, что конкретно означает выбор нуля или единицы, является предметом договоренности в конкретном приложении. Так, $\omega_{li} = 1$ означает в примере 1 – участие в беспорядках, в примере 2 – проживание в интересующем районе.*

агентом, после чего он делает *выбор стратегии*.

Порог агента i из группы l обозначим через c_{li}.

Далее будем полагать, что величина порога является *целочисленной* $c_{li} \in \mathbb{Z}, \forall l = \overline{1,L}, i = \in I_l$. Агент *сравнивает* её с величиной $m_{l\setminus i} - m_{-l}$, которая тоже принимает целые значения в интервале от $|I_l| - |I|$ до $|I_l| - 1$.

Порог агента i из группы $l = \overline{1,L}$, $i \in I_l$, определяет его целевую функцию, а разность $m_{l\setminus i} - m_{-l}$ – её аргумент, а именно обстановку. Выбор стратегии рациональным агентом при пороговом конформном БКП можно формализовать в виде *игры в нормальной форме* $H^c = \left\{\Omega, \{u^c_{li}\}_{l=\overline{1,L}, i\in I}, \{I_l, l = \overline{1,L}\}\right\}$, и целевые функции агентов-игроков определяются следующим выражением:

(18) $$u^c_{li}(\omega_{li}, m_{l\setminus i}, m_{-l}) = c_{li}(1 - \omega_{li}) + (m_{l\setminus i} - m_{-l})\omega_{li},$$

где $l = \overline{1,L}, i \in I_l$.

Если для порога игрока $l_0 i_0$ справедливо $c_{l_0 i_0} > |I_l| - 1$ ($c_{l_0 i_0} < |I_l| - |I|$), то $\omega_{l_0 i_0} = 1$ ($\omega_{l_0 i_0} = 0$) является доминируемой стратегией этого игрока (определение 2), которую вследствие общего знания учитывают другие игроки. Так, в группе l_0 новый интервал для обстановки будет $|I_{l_0}| - |I| \leqslant m_{l_0\setminus i} - m_{-l_0} \leqslant |I_{l_0}| - 2$ ($|I_{l_0}| - |I| + 1 \leqslant m_{l_0\setminus i} - m_{-l_0} \leqslant |I_{l_0}| - 1$). В остальных группах $l \neq l_0$ новый интервал для обстановки – $|I_l| - |I| + 1 \leqslant m_{l\setminus i} - m_{-l} \leqslant |I_l| - 1$ ($|I_l| - |I| \leqslant m_{l\setminus i} - m_{-l} \leqslant |I_l| - 2$). Значит, у всех игроков со строго доминируемыми стратегиями эти же стратегии останутся строго доминируемыми и после их учёта остальными игроками. Но могут появиться новые игроки со строго доминируемыми стратегиями, и процедура учёта повторяется снова. И так далее, пока

- либо не останутся только игроки со строго недоминируемыми стратегиями (определение 3),

- либо будет найдено РДС (определение 5). Это равновесие является РН, и так как стратегии бинарны, оно будет единственным.

Рассмотрим первый случай. Не умаляя общности можно считать, что в игре участвуют n игроков. При этом значения их порогов лежат в следующих пределах:

(19) $$|I_l| - |I| \leqslant c_{li} \leqslant |I_l| - 1, \forall i \in I_l, l = \overline{1, L}.$$

Целевые функции (18) порождают следующие *целочисленные* индикаторы выбора (определение 1):

(20) $$s_{li}\left(\omega_{li}, m_{l\setminus i}, m_{-l}\right) = c_{li}(1 - 2\omega_{li}) + (m_{l\setminus i} - m_{-l})(2\omega_{li} - 1),$$

где $l = \overline{1, L}, i \in I_l$. Из целочисленности значений индикаторов выбора следует, что наименьшая ненулевая значимость выбора (определение 7) равна **1**.

Для каждой группы игроков определим следующую функцию:

(21) $$\Phi_l\left(q\right) = \sum_{i \in I_l} \chi_{\{c_{li} < q\}}\left(i\right), l = \overline{1, L}, q = \{|I_l| - |I| + 1, \ldots, |I_l|\},$$

где $\chi_A(i)$ – индикатор того, что $i \in A$, или характеристическая функция множества A.

Если ввести строгие вероятностные определения для порогов как случайных величин, то функция $\Phi_l\left(\cdot\right)$ является *эмпирической функцией распределения порогов* игроков в группе l. Это название будет использоваться далее, тем не менее нужно учитывать отсутствие в нём строгости.

Определение 9. *Будем говорить, что две ситуации ω_1 и ω_2 эквивалентны, если количество игроков в каждой группе, выбравших одну и ту же стратегию в обоих ситуациях, равны. Множество эквивалентных ситуаций будем называть классом эквивалентности и обозначать $\omega(m_1, \ldots, m_L) \subset \Omega$, где $m_1, \ldots, m_L$ – число игроков, выбравших одинаковую стратегию.*

Определение 10. *Будем говорить, что класс эквивалентности обладает свойством, относящимся к ситуации, например, является РН и пр., если все элементы этого класса обладают этим свойством.*

Замечание 2. Классы эквивалентности $\omega(m_1, \ldots, m_L) \subset \Omega$, у которых в качестве аргументов в местах по номером $l = \overline{1, L}$ стоят либо 0, либо n_l, состоят из одного элемента (ситуации).

Вообще произвольный класс эквивалентности $\omega(m_1, \ldots, m_L) \subset \Omega$ состоит из $\prod_{l=1}^{L} C_{|I_l|}^{m_l}$ элементов (ситуаций), где $C_{|I_l|}^{m_l} = \frac{|I_l|!}{m_l!(|I_l|-m_l)!}$ – число сочетаний.

Для характеризации РН (9) воспользуемся леммой 1, из которой выводится следующая теорема.

Теорема 1. *Класс эквивалентности* $\omega^*(m_1, \ldots, m_L) \subset \Omega$ *по выбору стратегии 1 является РН (определение 6) в игре* H^c *с индикатором выбора* (20)*, если и только если*

1) $\{m_l\}_{l=\overline{1,L}}$ *являются решениями системы уравнений:*

(22) $$m_l = \Phi_l\left(m_l - m_{-l}\right), l = \overline{1, L},$$

где Φ_l *определяется* (21)*,*

2) $\omega^*(m_1, \ldots, m_L)$ *определяются следующим образом*

(23) $$\omega^*_{li}(m_1, \ldots, m_L) = \chi_{\left\{j \in I_l \middle| c_{lj} < m_l - m_{-l}\right\}}(i),$$

где $l = \overline{1, L}, i \in I_l$.

Доказательство. В силу целочисленности индикатора выбора (20) для всех игроков li наименьшая значимость выбора (определение 7) $\varepsilon_{li} = 1$, поэтому из (20) следует, что для всех $l = \overline{1, L}, i \in I_l$, справедливо следующее равенство:

$$s_{li}\left(1, m_{l\setminus i}, m_{-l}\right) + \varepsilon_{li}\omega_{li} = m_l - m_{-l} - c_{li},$$

где $m_l = m_{l\setminus i} + \omega_{li}$. Легко показать, что ОРП (12) можно переписать в следующем виде:

(24) $$\tilde{\varphi}_{li}(m_1, \ldots, m_L) = \chi_{\left\{j \in I_l \middle| c_{lj} < m_l - m_{-l}\right\}}(i),$$

где индикатор множества совпадает с фигурирующем в (23).

Пусть выполнены равенства (22) и (23). Тогда из (23), (24) по лемме 1 профиль стратегий $\omega^*_i(m_1, \ldots, m_L)$ является РН. Сложив все равенства (23) по $i \in I_l$, из определения (21), получим

$$\sum_{i=\overline{1,n_l}} \omega^*_{li}(m_1, \ldots, m_L) = \Phi_l(m_l - m_{-l}).$$

Тогда из равенства (22) следует, что число игроков, сделавших выбор стратегии 1 в группе l, где $l = \overline{1, L}$, равно m_l.

Пусть профиль стратегий $\omega^*(m_1, \ldots, m_L) \in \Omega$ с числом игроков m_l, сделавших выбор стратегии 1 в группе l, где $l = \overline{1, L}$, является РН (9). Тогда из (24) и леммы 1 следует (23). Сложив все равенства (23) по $i \in I_l$, получим (22).

***Следствие* 1.** *Класс эквивалентности $\omega^*(m_1, \ldots, m_L) \subset \Omega$, являющийся РН (определение 10), состоит из одного элемента, определяемого* (23).

Доказательство. Доказательство следует из того, что (23) однозначно определяет стратегию игрока при фиксированном наборе $(m_1, \ldots, m_L)$, являющимся одним из решений системы (22).

***Замечание* 3.** Следствие 1 с первого взгляда может показаться странным, так как если два игрока $i_1 \neq i_2$ группы l имеют одинаковые значения порогов и $c_{li_1} = c_{li_2} < m_l - m_{-l}$, то комбинации $\omega_{li_1} = 1, \omega_{li_2} = 0$ и $\omega_{li_1} = 0, \omega_{li_2} = 1$ не изменяют m_l, но входят в различные ситуации. Дело в том, что согласно (23) таких комбинаций в ситуации РН не может быть, а возможно только равенство $\omega_{li_1} = 1, \omega_{li_2} = 1$. То же самое, если $c_{li_1} = c_{li_2} \geqslant m_l - m_{-l}$, то возможно только равенство $\omega_{li_1} = 0, \omega_{li_2} = 0$. Это содержательно объясняет утверждение следствия 1.

Теорема 1 позволяет, решив *систему уравнений* (22), описать все возможные профили стратегий, которые являются РН.

Для того чтобы найти все решения системы уравнений (22), упорядочим множество порогов в каждой группе $l = \overline{1, L}$ в порядке их неубывания:

(25)

$$c_{10} = |I_1| - |I| \leqslant c_{11} \leqslant \ldots \leqslant c_{1|I_1|} \leqslant |I_1| - 1 \leqslant |I_1| = c_{1|I_1|+1},$$

$$\ldots$$

$$c_{L0} = |I_L| - |I| \leqslant c_{L1} \leqslant \ldots \leqslant c_{L|I_L|} \leqslant |I_L| - 1 \leqslant |I_L| = c_{L|I_L|+1}.$$

Тогда справедлива следующая теорема о решениях системы уравнений (22) и следствие из неё о структуре РН.

***Утверждение* 4.** *Упорядоченный набор* $(m_1, m_2, \ldots, m_L)$, $m_l = \overline{0, |I_l|}, l = \overline{1, L}$, *является решением* (22) *если и только если* *выполнено*

(26) $$c_{lm_l} < m_l - m_{-l} \leqslant c_{lm_l+1}, \forall l = \overline{1, L}.$$

Доказательство. Если существует упорядоченный набор

(27) $$(m_1, m_2, \dots, m_L), m_l = \overline{0, |I_l|}, l = \overline{1, L},$$

для которого справедливо (26), то значение эмпирической функции распределения (21) для группы $l = \overline{1, L}$ будет равно m_l и, соответственно, выполнено равенство (22).

Пусть, обратно, упорядоченный набор (27) является решением системы уравнений (22). Тогда, вследствие определения эмпирической функции распределения (21) и упорядочения порогов (25), справедливо (26).

<u>Следствие 2.</u> *Профиль стратегий $\omega^*(m_1, \dots, m_L) \in \Omega$ с числом игроков m_l, сделавших выбор стратегии 1 в группе l, где $l = \overline{1, L}$, имеет следующую структуру:*

(28) $$\begin{gathered} \forall i : 1 \leqslant i \leqslant m_l, c_{li} < m_l - m_{-l} \to \omega^*_{li}(m_1, \dots, m_L) = 1, \\ \forall i : m_l < i \leqslant |I_l|, c_{li} \geqslant m_l - m_{-l} \to \omega^*_{li}(m_1, \dots, m_L) = 0 \end{gathered}$$

тогда и только тогда, когда $\omega^*(m_1, \dots, m_L)$ является РН.

Доказательство. Пусть профиль стратегий $\omega^*(m_1, \dots, m_L) \in \Omega$ с числом игроков m_l, сделавших выбор стратегии 1 в группе l, где $l = \overline{1, L}$, имеет структуру (28), тогда справедливо (23) и, вследствие упорядоченности порогов игроков (25), справедливо (26). Тогда, из утверждения 4, следует, что упорядоченный набор $(m_1, \dots, m_L)$ является решением системы уравнений (22). Таким образом выполнены достаточные условия теоремы 1: (22) и (23). Значит, $\omega^*(m_1, \dots, m_L)$ является РН.

Обратно, пусть $\omega^*(m_1, \dots, m_L) \in \Omega$ является РН с числом игроков m_l, сделавших выбор стратегии 1 в группе l, где $l = \overline{1, L}$. Тогда, согласно теореме 1, упорядоченный набор $(m_1, \dots, m_L)$ является решением системы уравнений (22). Значит, по утверждению 4, справедливо (26). Из упорядоченности порогов (25) и (23) (теорема 1 справедливо), следует, что РН имеет структуру (28).

Определение 11. *Ситуацию $\omega^P \in \Omega$ будем называть оптимальной по Парето, если не существует ситуации $\omega \neq \omega^P$*

$$\forall l = \overline{1, L}, i \in I_l : u^c_{li}(\omega^P) \leqslant u^c_{li}(\omega)$$
$$\exists l' = \overline{1, L}, i' \in I_{l'} : u^c_{l'i'}(\omega^P) < u^c_{l'i'}(\omega). \tag{29}$$

Утверждение 5. *Для любого $l = \overline{1, L}$ ситуация $\omega^P_c(0, \ldots, |I_l|, \ldots, 0)$, при которой все агенты группы l выбрали стратегию 1, а остальные выбрали стратегию 0, является эффективной по Парето (определение 11). Если к тому же $|I_l| \geqslant \frac{|I|}{2}$, то $\omega^P_c(0, \ldots, |I_l|, \ldots, 0)$ является РН.*

Доказательство. По определению целевой функции (18) и в силу ограничений (19), справедливо следующее:

$$u^c_{l_0 i}(\omega^P) = |I_{l_0}| - 1 \geqslant c_{l_0 i}, i \in I_{l_0}. \tag{30}$$

Значит, для $\omega \neq \omega^P$, в силу определения целевой функции (18), справедливо $u^c_{l_0 i}(\omega^P) > u^c_{l_0 i}(\omega), \forall i \in I_{l_0}$. Доказательство того, что ω^P эффективно по Парето, следует из определения 11.

По определению целевой функции (18) для всех $i \in I_l, l \neq l_0$

$$u^c_{li}(\omega_{li}, 0, |I_{l_0}|) = c_{li}(1 - \omega_{li}) + (-|I_{l_0}|)\omega_{li}. \tag{31}$$

Если выполнено $|I_l| \geqslant \frac{|I|}{2}$, то в силу ограничений (19) справедливо следующее:

$$\forall i = \overline{1, |I_l|} \to c_{li} \geqslant |I_l| - |I| \geqslant -\frac{|I|}{2} \geqslant -|I_l|, \tag{32}$$

Из (31) и (32) следует, что $u^c_{li}(\omega^P) = u^c_{li}(0, 0, |I_{l_0}|) \geqslant u^c_{li}(1, 0, |I_{l_0}|)$ для всех $i \in I_l, l \neq l_0$. Значит из (30) следует, что ω^P является РН.

В следующем разделе полученные результаты будут применены к примерам порогового социального БКП.

3.1. Примеры теоретико-игровых моделей социального БКП

Теоретико-игровая модель для примера 1 . Рассмотрим игру в нормальной форме $H^G = \left\{\Omega, \left\{u^G_i\right\}_{i \in I}, I\right\}$, где индекс G означает Granovetter. Поскольку $L = 1$, обстановкой является только величина $m_{l \setminus i} = m_{-i}$, так как m_{-l} не имеет смысла для одной группы. *Целевые функции* (18) игроков определяются следующим выражением:

$$u_i^G(\omega_i, m_{-i}) = c_i(1-\omega_i) + m_{-i}\omega_i, i \in I,$$

где пороги c_i, согласно (19) находится в пределах $0 \leqslant c_i \leqslant |I|-1$ $\forall i \in I$.

Целевые функции порождают следующие *индикаторы выбора* (определение 1):

$$s_i^G(\omega_i, m_{-i}) = c_i(1-2\omega_i) + m_{-i}(2\omega_i - 1), i \in I.$$

Введем следующую *эмпирическую функцию распределения порогов* игроков

$$\Phi(q) = \sum_{i \in I} \chi_{\{c_i < q\}}(i), q = \{0, ..., |I|\}.$$

С помощью теоремы 1 можно доказать следствие:

Следствие 3. *Класс эквивалентности $\omega^*(m) \in \Omega$ с числом игроков m, сделавших выбор стратегии 1, является РН (определение 6) в игре H^G если и только если*

1) *число m является корнем уравнения:*

$$m = \Phi(m).$$

2) *профиль стратегий $\omega^*(m)$ определяется следующим образом:*

$$\omega_i^*(m) = \chi_{\{j \in I | c_j < m\}}(i), i \in I_l.$$

Упорядочим множество порогов их неубывания: $c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_{|I|}$. Согласно утверждению 4 решения уравнения $m = \Phi(m)$ определяются следующим образом:

1. Всегда существует два решения $m = 0$ и $m = |I|$.

2. Целое число $m = \overline{1, |I|-1}$ является решением тогда и только тогда, когда выполнено

$$c_m < m \leqslant c_{m+1}.$$

Согласно следствию 2 профиль стратегий $\omega^*(m) \in \Omega$ с числом игроков m, сделавших выбор стратегии 1, имеет следующую структуру:

$$\forall i : 1 \leqslant i \leqslant m, c_i < m \to \omega_i^*(m) = 1,$$
$$\forall i : |I| \geqslant i > m, c_i \geqslant m \to \omega_i^*(m) = 0,$$

тогда и только тогда, когда $\omega^*(m)$ является РН.

Замечание 4. Число корней уравнения $m = \Phi(m)$ *максимально* и равно $|I| + 1$, а значит, существует $|I| + 1$ равновесий Нэша при равномерном распределении порогов игроков $\{c_i = i - 1\}_{i=1\ldots|I|}$. Действительно, два решения $m = 0$, $m = |I|$ существуют всегда согласно утверждению 4. По той же теореме промежуточные $|I| - 1$ решений существуют, так как $t_m < m \leqslant t_{m+1}$ выполнено для всех $m = \overline{1, |I| - 1}$. Этот частный случай находится в соответствии с базовой моделью Грановеттера [10], когда функция распределения порогов совпадает с биссектрисой первого квадранта. Когда все пороги равны 0 или все равны $|I| - 1$, существует только *два «крайних» РН* $m = 0$ и $m = |I|$.

Из утверждения 5 следует, что ситуация РН для $m = |I|$ является оптимальной по Парето (определение 11).

Развернем эту теоретико-игровую модель социального порогового БКП в дискретном времени. Предположим, что знание агентов ограничено тем, что каждый агент знает только *свой выбор и число* агентов, в текущий момент времени выбравших стратегию 1. Пусть в начальный момент времени это количество равно $m^{(0)}$. В последующие моменты времени агенты *одновременно* изменяют свою стратегию порогового БКП, сравнивая свои пороги с $m^{(0)}$. Тогда справедлива следующая теорема об индикаторном поведении.

Теорема 2. *Процедура*

$$\omega_i^{(k+1)} = \chi_{\left\{j \in I \middle| c_j < m^{(k)}\right\}}(i), i \in I \tag{33}$$

сходится к одному из РН за конечное число шагов.

Доказательство. Согласно утверждению 4 любое $m^{(0)}$ будет расположено между двумя значениями m_-^* и m_+^*, каждое из которых определяет некоторое РН. Действительно, $m^{(0)}$ всегда находится в пределах $0 \leqslant m^{(0)} \leqslant |I|$, а 0 и $|I|$ всегда соответствуют РН. Согласно (26), могут существовать слева и справа от $m_l^{(0)}$ ближайшие количества агентов, выбравших 1, характеризующих некоторое РН.

Итак, пусть $m^{(0)}$ расположено между ближайшими к нему количествами агентов, выбравших 1, характеризующих некоторое РН

$$m^*_\vee < m^{(0)} < m^*_\wedge, \tag{34}$$

и само $m^{(0)}$ *не является координатой РН*. Значит по (22) из теоремы 1 справедливо $m^{(0)} \neq \Phi(m^{(0)})$. Предположим для определённости, что

$$m^{(0)} < \Phi(m^{(0)}). \tag{35}$$

Из правой части (34) и, в силу неубывания Φ (21), справедливо неравенство

$$\Phi(m^{(0)}) \leqslant \Phi(m^*_\wedge). \tag{36}$$

Но, по предположению, $m^*_\wedge$ соответствует РН, поэтому из (22) теоремы 1 справедливо

$$\Phi(m^*_\wedge) = m^*_\wedge. \tag{37}$$

Таким образом, исходя из (33), (35), (36) и (37), справедливо следующее неравенство:

$$m^{(0)} < m^{(1)} \leqslant m^*_\wedge. \tag{38}$$

Докажем, что $\forall k \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$m^{(k-1)} < m^{(k)} \leqslant m^*_\wedge. \tag{39}$$

Из (38) следует, что (39) верно для $k = 1$. Предположим, что (39) верно для k, тогда, так как в этом случае $m^{(k-1)}$ не соответствует РН, и в силу неубывания Φ (21)

$$\Phi(m^{(k-1)}) = m^{(k)} < \Phi(m^{(k)}) = m^{(k+1)} \leqslant m^*_\wedge. \tag{40}$$

Таким образом, из (40) по индукции (39) верно.

Так как целочисленная последовательность $\{m^{(k)}\}_{k\geqslant 1}$ строго возрастает и ограничена сверху целым положительным числом, то на конечном шаге K будет справедливо равенство $m^{(K)} = m^*_\wedge$.

Теоретико-игровая модель для примера 2. Рассмотрим игру в нормальной форме

$$H^S = \left\{ \Omega, \{u_{li}\}_{i=\in I_l}, \{I_l\}, l = 1,2 \right\},$$

где индекс S означает Schelling.

Целевые функции (18) групп $l = 1,2$ игроков $i = \overline{1,|I_l|}$ определяется следующим выражением:

$$u_{li}(\omega_{li}, m^{(l)}, m^{(3-l)}) = c_{li}(1 - \omega_{li}) + (m_{-i}^{(l)} - m^{(3-l)})\omega_{li},$$

где $m_{-i}^{(l)}$ – число игроков группы l, сделавших выбор стратегии 1, без учёта игрока i и $m^{(3-l)}$ – число игроков соответствующей группы, сделавших выбор стратегии 1. Пороги игроков группы l, обозначенные c_{li}, согласно (19) находится в пределах $-|I_{3-l}| \leqslant c_{li} \leqslant |I_l| - 1, \forall i \in I_l$.

Целевые функции порождают следующие *индикатора выбора* групп $l = 1,2$ игроков $i \in I_l$ (определение 1):

$$u_{li}(\omega_{li}, m^{(l)}, m^{(3-l)}) = c_{li}(1 - 2\omega_{li}) + (m_{-i}^{(l)} - m^{(3-l)})(2\omega_{li} - 1).$$

Введем для каждой группы $l = 1,2$ игроков следующие *эмпирические функции распределения порогов* игроков:

$$\Phi_l(q) = \sum_{i \in I_l} \chi_{\{c_{li} < q\}}(i), q = \{-|I_{3-l}|, ..., |I_l|\}.$$

Исходя из теоремы 1, для того чтобы профиль стратегий $\omega^*(m^{(1)}, m^{(2)}) \in \Omega$ с числом игроков $m^{(1)}, m^{(2)}$, сделавших выбор стратегии 1 в группах 1 и 2 соответственно, был РН (9) в игре H^S, необходимо и достаточно, чтобы

1) числа $m^{(l)}$, $l = 1,2$, были корнями системы уравнений:

$$m^{(l)} = \Phi_l\left(m^{(l)} - m^{(3-l)}\right) \tag{41}$$

2) профиль стратегий $\omega^*(m^{(1)}, m^{(2)})$ определялся следующим образом

$$\omega_{li}^*(m^{(l)}, m^{(3-l)}) = \chi_{\left\{j \in I_l \middle| c_{1j} < m^{(l)} - m^{(3-l)}\right\}}(i), i \in I_l, l = 1,2.$$

Теорема 1 позволяет, решив *систему алгебраических уравнений* (41), описать все возможные профили стратегий, которые являются РН.

Для того чтобы найти все решения системы уравнений (41), упорядочим множество порогов в каждой группе в порядке неубывания последних:

$$-|I_{3-l}| \leqslant c_{l1} \leqslant c_{l2} \leqslant \ldots \leqslant c_{l|I_l|} \leqslant |I_l| - 1.$$

Согласно утверждению 4 решения системы уравнений (41) определяются следующим образом:

1. Всегда существуют два решения:

$$(0, |I_2|), (|I_1|, 0). \tag{42}$$

2. Упорядоченный набор $(m^{(1)}, m^{(2)})$, $m^{(1)} = \overline{1, |I_1| - 1}$, $m^{(2)} = \overline{0, |I_2| - 1}$ является решением тогда и только когда выполнено

$$c_{lm^{(l)}} < m^{(l)} - m^{(3-l)} \leqslant c_{l(m^{(l)}+1)}.$$

Согласно следствию 2 профиль стратегий $\omega^*(m^{(1)}, m^{(2)}) \in \Omega$ с числом игроков $m^{(1)}, m^{(2)}$, сделавших выбор стратегии 1 в группах $l = 1$ и $l = 2$, имеет следующую структуру:

$$\forall i : 1 \leqslant i \leqslant m^{(l)}, c_{li} < m^{(l)} - m^{(3-l)} \to \omega^*_{li}(m^{(l)}, m^{(3-l)}) = 1,$$
$$\forall i : |I_l| \geqslant i > m^{(l)}, c_{li} \geqslant m^{(l)} - m^{(3-l)} \to \omega^*_{li}(m^{(l)}, m^{(3-l)}) = 0$$

тогда и только тогда, когда $\omega^*(m^{(1)}, m^{(2)})$ является РН.

Из утверждения 5 следует, что ситуации РН для $(|I_1|, 0)$ и $(0, |I_2|)$ являются оптимальными по Парето (определение 11).

Приведем ещё одно свойство РН в виде следующей теоремы.

<u>Лемма 3.</u> *Пусть* $(m_p^{(1)}, m_p^{(2)})$, $p = 1, 2$, *– два решения системы уравнений* (41). *Тогда если*

$$m_p^{(l)} \leqslant m_{3-p}^{(l)} \tag{43}$$

для некоторого $l = 1, 2$, *то* $m_p^{(3-l)} \geqslant m_{3-p}^{(3-l)}$.

Доказательство. В силу (42), у системы уравнений (41) существует не менее двух решений. Так как $m_p^{(l)} = \Phi_l(m_p^{(l)} - m_p^{(3-l)})$ и $m_{3-p}^{(l)} = \Phi_l(m_{3-p}^{(l)} - m_{3-p}^{(3-l)})$, то из (43) следует, что $\Phi_l(m_p^{(l)} - m_p^{(3-l)}) \leqslant \Phi_l(m_{3-p}^{(l)} - m_{3-p}^{(3-l)})$. По определению (21) функция Φ_l неубывающая, поэтому $m_p^{(l)} - m_p^{(3-l)} \leqslant m_{3-p}^{(l)} - m_{3-p}^{(3-l)}$, и, в силу неубывания Φ_{3-l}, $\Phi_{3-l}(m_p^{(3-l)} - m_p^{(l)}) \geqslant \Phi_{3-l}(m_{3-p}^{(3-l)} - m_{3-p}^{(l)})$. Так как $m_p^{(3-l)}$ и $m_{3-p}^{(3-l)}$ – решения системы уравнений (41), то $m_p^{(3-l)} \geqslant m_{3-p}^{(3-l)}$.

Утверждение 6. *Пусть система уравнений* (41) *имеет* $P \geqslant 2$ *решений. Тогда, если упорядочить* $0 \leqslant m_1^{(l)} \leqslant m_2^{(l)} \leqslant \ldots \leqslant m_{P-2}^{(l)} \leqslant |I_l|$, *то* $|I_{3-l}| \geqslant m_1^{(3-l)} \geqslant m_2^{(3-l)} \geqslant \ldots \geqslant m_{P-2}^{(3-l)} \geqslant 0$.

Доказательство. Доказательство следует непосредственно из леммы 3.

Развернем теоретико-игровую модель Шеллинга в дискретном времени $k \geqslant 0$. Предположим, что знание агентов ограничено тем, что каждый агент знает только *разность количеств* агентов из своей и чужой группы, в текущий момент времени выбравших стратегию 1 (включая себя). Пусть в начальный момент времени $k = 0$ эти количества равны $m^{(1)}(0)$, $m^{(2)}(0)$. В последующие моменты времени агенты *одновременно* изменяют свои стратегии, сравнивая пороги с указанной разностью. Тогда справедлива следующая теорема об индикаторном поведении, которая в более простой форме доказана выше для примера 1.

Теорема 3. *Процедура*

$$\omega_l(k+1) = \chi_{\{j \in I_l | c_l < m_l(k) - m_{3-l}(k)\}}(i), l = 1, 2, i \in I_l, \tag{44}$$

сходится к одному из РН за конечное число шагов.

Доказательство. Пусть система уравнений (41) имеет $P \geqslant 2$ решений. Множество решений $m^{(1)}$ в группе 1 упорядочим *по неубыванию*, тогда из утверждения 6 в группе 2 упорядоченность решений $m^{(2)}$ будет *по невозрастанию*

$$\begin{gathered} m_1^{(1)} = 0 \leqslant m_2^{(1)} \leqslant m_3^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant m_{P-1}^{(1)} \leqslant |I_1| = m_P^{(1)}, \\ m_1^{(2)} = |I_2| \geqslant m_2^{(2)} \geqslant m_3^{(2)} \geqslant \ldots \geqslant m_{P-1}^{(2)} \geqslant 0 = m_P^{(2)}. \end{gathered} \tag{45}$$

Тогда существуют номера $p_1, p_2 : 1 \leqslant p_l \leqslant P, l = 1, 2$, такие, что для начального состояния процедуры (44) $m^{(1)}(0), m^{(2)}(0)$ имеют место неравенства $m^{(1)}_{p_1} \leqslant m^{(1)}(0) \leqslant m^{(1)}_{p_1+1}$ и $m^{(2)}_{p_2} \geqslant m^{(2)}(0) \geqslant m^{(2)}_{p_2+1}$. Введя обозначения $V = \max(p_1, p_2) + 1$, $v = \min(p_1, p_2)$, в силу упорядоченности (45) справедливо

$$\begin{aligned} m^{(1)}_v \leqslant m^{(1)}(0) \leqslant m^{(1)}_V,\\ m^{(2)}_v \geqslant m^{(2)}(0) \geqslant m^{(2)}_V. \end{aligned} \tag{46}$$

Следующий шаг рекурсии может быть:

1) *разнонаправлен* по группам,

2) *однононаправлен* по группам.

Рассмотрим сначала случай 1, когда рекурсия происходит *разнонаправлено* по группам:

$$\begin{cases} m^{(1)}(0) \leqslant \Phi_1\left(m^{(1)}(0) - m^{(2)}(0)\right) = m^{(1)}(1) \leqslant \\ \leqslant \Phi_1(m^{(1)}_V - m^{(2)}_V) = m^{(1)}_V, \\ m^{(2)}(0) \geqslant \Phi_2\left(m^{(2)}(0) - m^{(1)}(0)\right) = m^{(2)}(1) \geqslant \\ \geqslant \Phi_2(m^{(2)}_V - m^{(1)}_V) = m^{(2)}_V; \end{cases} \tag{47}$$

либо

$$\begin{cases} m^{(1)}(0) \geqslant \Phi_1\left(m^{(1)}(0) - m^{(2)}(0)\right) = m^{(1)}(1) \geqslant \\ \geqslant \Phi_1(m^{(1)}_v - m^{(2)}_v) = m^{(1)}_v, \\ m^{(2)}(0) \leqslant \Phi_2\left(m^{(2)}(0) - m^{(1)}(0)\right) = m^{(2)}(1) \leqslant \\ \leqslant \Phi_2(m^{(2)}_v - m^{(1)}_v) = m^{(2)}_v; \end{cases} \tag{48}$$

где первые равенства верны из (44), вторые неравенства верны по монотонности функций Φ_1 и Φ_2 и (46), вторые равенства верны из того, что $\left(m^{(1)}_V, m^{(2)}_V\right)$ и $\left(m^{(1)}_v, m^{(2)}_v\right)$ является решением (45).

Докажем, что и на последующих шагах рекурсия будет *направлена* в ту же сторону, т.е. для любого k из (47) и (48) соответственно верно:

$$\begin{cases} m^{(1)}(k-1) \leqslant m^{(1)}(k) \leqslant m^{(1)}_V, \\ m^{(2)}(k-1) \geqslant m^{(2)}(k) \geqslant m^{(2)}_V; \end{cases} \tag{49}$$

либо

$$\begin{cases} m^{(1)}(k-1) & \geqslant m^{(1)}(k) \geqslant m_v^{(1)}, \\ m^{(2)}(k-1) & \leqslant m^{(2)}(k) \leqslant m_v^{(2)}. \end{cases} \tag{50}$$

Докажем сначала (49), для (50) доказательство и дальнейшие рассуждения аналогичны. Из (47) следует, что (49) верно для $k = 1$. Предположим, что оно верно для k, тогда в силу неубывания функций Φ_1 и Φ_2

$$\begin{gathered} m^{(1)}(k-1) \leqslant m^{(1)}(k) = \Phi_1\left(m^{(1)}(k-1) - m^{(2)}(k-1)\right) \leqslant \\ \leqslant \Phi_1\left(m^{(1)}(k) - m^{(2)}(k)\right), \\ m^{(2)}(k-1) \geqslant m^{(2)}(k) = \Phi_2\left(m^{(2)}(k-1) - m^{(1)}(k-1)\right) \geqslant \\ \geqslant \Phi_2\left(m^{(2)}(k) - m^{(1)}(k)\right), \end{gathered} \tag{51}$$

значит, снова в силу неубывания функций Φ_1 и Φ_2 и (46) верно следующее:

$$\begin{gathered} m^{(1)}(k) \leqslant m^{(1)}(k+1) \leqslant \Phi_1(m_V^{(1)} - m_V^{(2)}) = m_V^{(1)}, \\ m^{(2)}(k) \geqslant m^{(2)}(k+1) \geqslant \Phi_2(m_V^{(2)} - m_V^{(1)}) = m_V^{(2)}. \end{gathered} \tag{52}$$

Из (52) по индукции (49) верно. Из чего следует, что

1) рекурсия (44) достигла равновесия Нэша, а именно, когда в (49) оба нестрогих левых неравенства перешли в равенства на определённом шаге,

2) либо для группы 1, либо для группы 2 будет строгое неравенство и, соответственно приближение к $m_V^{(1)}$ или $m_V^{(2)}$. Таким образом, если рекурсия не остановилась, то она дойдет до РН, соответствующее $(m_V^{(1)}, m_V^{(2)})$.

Перейдем теперь к случаю 2, когда рекурсия происходит *однонаправлено* по группам:

$$\begin{cases} m^{(1)}(0) \leqslant (<)\Phi_1\left(m^{(1)}(0) - m^{(2)}(0)\right) = m^{(1)}(1) \leqslant \\ \leqslant \Phi_1(m_V^{(1)} - m_V^{(2)}) = m_V^{(1)}, \\ m^{(2)}(0) < (\leqslant)\Phi_2\left(m^{(2)}(0) - m^{(1)}(0)\right) = m^{(2)}(1) \leqslant \\ \leqslant \Phi_2(m_v^{(2)} - m_v^{(1)}) = m_v^{(2)}; \end{cases} \tag{53}$$

либо

$$(54)\qquad \begin{cases} m^{(1)}(0) \geqslant (>)\Phi_1\left(m^{(1)}(0) - m^{(2)}(0)\right) = m^{(1)}(1) \geqslant \\ \geqslant \Phi_1(m_v^{(1)} - m_v^{(2)}) = m_v^{(1)}, \\ m^{(2)}(0) > (\geqslant)\Phi_2\left(m^{(2)}(0) - m^{(1)}(0)\right) = m^{(2)}(1) \geqslant \\ \geqslant \Phi_2(m_V^{(2)} - m_V^{(1)}) = m_V^{(2)}; \end{cases}$$

где первыми указаны знаки предполагаемых неравенств (в скобках возможные их альтернативы), первые равенства верны из (44), вторые неравенства верны по монотонности функций Φ_1 и Φ_2 и (46), вторые равенства верны из того, что $\left(m_V^{(1)}, m_V^{(2)}\right)$ и $\left(m_v^{(1)}, m_v^{(2)}\right)$ является решением (45).

Если пары $(m_v^{(1)}, m_V^{(2)})$ и $(m_V^{(1)}, m_v^{(2)})$ одновременно являются решениями (45), то в силу (46) $m^{(1)}(0)$ и $m^{(2)}(0)$ являются решениями и рекурсия остановится на нулевом шаге, соответствующем РН. Пусть теперь *одна из пар* $(m_v^{(1)}, m_V^{(2)})$ и $(m_V^{(1)}, m_v^{(2)})$ не является решением (45). В этом случае утверждается, что

1) либо последовательность $\left(m^{(1)}(k), m^{(2)}(k)\right)$ остановится на решении системы (45),

2) либо с некоторого шага неравенства станут разнонаправленными и последующие шаги будут подчиняться (49) или (50).

Чтобы доказать 2, предположим противное, т.е. для всех шагов неравенства однонаправлены, причём в одном из них неравенство строгое. Из-за исключения случая 1 по рекурсии последовательности достигнут той пары $(m_v^{(1)}, m_V^{(2)})$ или $(m_V^{(1)}, m_v^{(2)})$, которая не являются решениями системы (45). Но такого быть не может, значит на определённом шаге одно из неравенств «изменится на обратное» и будет верно (49) или (50). А в этом случае, как было показано выше, рекурсия (44) сходится к решению системы.

4. Заключение

Принято считать, что для теоретико-игровых моделей с дискретным числом состояний существование и единственность РН в чистых стратегиях трудно доказать, выделяя аналитические свойства целевой функции. Для конкретной игры возможен только способ перебора состояний и их проверка на РН. В главе **??** показано, что если

1) перейти от целевой функции к *оператору рационального поведения* (ОРП),

2) рассматривать *бинарное* множество стратегий (БКП),

3) агрегировать стратегии агентов в состояния групп (типов агентов) в коллективе так, чтобы в каждой группе выбор был пороговым,

то существование РН можно доказать, а также выразить суждение о его единственности. При этом нахождение РН производится с помощью неподвижной точки эмпирической функции распределения порогов.

Свойства обобщённой монотонности оператора эмпирической функции распределения порогов позволяют классифицировать те типы поведения в прикладных моделях, которые описывает соответствующий оператор: комонотонный – социальный тип поведения, контрамонотонный – экономический, политонный – социально–экономический (точные определения будут введены в последней части серии статей). Так, например, фундаментальные примеры М. Грановеттера [10] и Т. Шеллинга [15] описываются одним типом оператора функции распределения – комонотонным: неубывающим по переменной «своей» группы.

Бинарное коллективное поведение всегда можно свести к пороговому поведению, и для отдельных типов порогового поведения монотонный оператор, определённый на вполне упорядоченном множестве коллективных стратегий, представляет собой эмпирическую функцию распределения порогов. Неподвижная точка этого оператора соответствует РН в исходной бинарной игре.

Кроме того, если определить индикаторное поведение с помощью этого оператора, то рекуррентная схема индикаторного поведения сходится к одному из РН (теоремы 2, 3). Это, с одной стороны, является иллюстрацией методов Грановеттера и Шеллинга (они так же исследовали сходимость рекуррентных схем с функциями распределения порогов), а с другой – позволяет сделать предельный переход к макро-моделям, являющимся предметом будущих исследований. Таким образом, последующим направлением исследования будет являться модель БКП с *бесконечным множеством* агентов. Её можно изучать с помощью предельного перехода для *эмпирической функции распределения* порогов, которая, как известно из теории вероятностей, при определённых условиях сходится к теоретической функции распределения. Это направление подразумевает использование как *статических* моделей, которые исследуются методами *статистической физики*, так и *динамических* моделей, для которых разработаны методы *теории случайных процессов* и *динамических систем*.

Литература

1. ГУБКО М.В., НОВИКОВ Д.А. *Теория игр в управлении организационными системами*. – М.: Изд-во «Синтег», 2002. – 148 с.
2. МАЗАЛОВ В.В. *Математическая теория игр и её приложения*. – М.: Изд-во «Лань», 2017. – 448 с.
3. ARONSON E., WILSON T. D., AKERT M. R., SOMMERS S. *Social Psychology*. – Pearson Prentice Hall, 2018. – 624 c.
4. BENITO J.M., HERNANDEZ P. *Schelling's dynamic models of segregation: a cellular automata approach* // XXIX Simposio de Análisis Económico, Universidad de Navara. – 2004. – P. 1–22.
5. CARD D., MAS A., ROTHSTEIN J. *Tipping and the dynamics of segregation* // Quarterly Journal of Economics. – 2008. – Vol. 123, No. 1. – P. 177–218.

6. CHWE M. SUK-YOUNG *Structure and Strategy in Collective Action* // American Journal of Sociology. – 1999. – Vol. 105, No. 1. – P. 128–156.
7. FAGIOLO G., VALENTE M., VRIEND N. *Dynamic Models of Segregation in Small-World Networks* // LEM Working Paper Series. – 2007. – No. 589. – P. 1–20.
8. GOLDENBERG J. LIBAI B. MULLER E. *Talk of the network: A complex systems look at the underlying process of word-of-mouth* // Marketing Letters. – 2001. – Vol. 12, No. 3. – P. 211–223.
9. GOLDENBERG J. LIBAI B. MULLER E. *The chilling effects of network externalities* // Int. Journal of Research in Marketing. – 2001. – Vol. 27, No. 1. – P. 4–15.
10. GRANOVETTER M. *Threshold Models of Collective Behavior* // The Journal of Mathematical Sociology. – 1978. – Vol. 83, No. 6. – P. 1420–1443.
11. GRANOVETTER M., SOONG R. *Threshold models of diffusion and collective behavior* // American Journal of Sociology. – 1983. – Vol. 9, No. 3. – P. 165–179.
12. GRANOVETTER M., SOONG R. *Threshold models of interpersonal effects in consumer demand* // Journal of Economic Behavior & Organization. – 1986. – Vol. 7, No. 1. – P. 83–99.
13. GRANOVETTER M., SOONG R. *Threshold Models of Diversity: Chinese Restaurants, Residential Segregation, and the Spiral of Silence* // Sociological Methodology. – 1988. – Vol. 18, No. 1988. – P. 69–104.
14. MACY M.W. *Chains of Cooperation: Threshold Effects in Collective Action* // American Sociological Review. – 1991. – Vol. 56, No. 6. – P. 730–747.
15. SCHELLING T.C. *Micromotives and Macrobehavior*. – Norton & Company, 2006. – 107 c.
16. XUE J. *Collective Behavior with Endogenous Thresholds* // Cambridge Working Papers in Economics. – 2006. – Vol. 3, No. 0613. – P. 1–38.

17. ZHANG J. *Tipping and residential segregation: A unified schelling model* // Journal of Regional Science. – 2011. – Vol. 51, No. 1. – P. 167–193.

GAME-THEORETICAL MODELS OF BINARY COLLECTIVE BEHAVIOR

Vladimir Breer, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (breer@live.ru).

Abstract: The article deals with game-theoretic models of threshold binary collective behavior that characterize social interaction between agents. For binary models, the function that characterizes the preferences of the players, equivalent to the utility function (UF) is the choice indicator. The sign of the choice indicator, and not the maximization of the UF, here characterizes the rational behavior of the agent. Using the choice indicator, we introduce a rational behavior operator that is an automorphism on the set of situations, and we prove the assertion that its fixed point is a Nash equilibrium (NE). It is also proved that any binary game-theoretic model is equivalent to some threshold model. Examples from the works of T. Schelling (two groups of agents) and M. Granovetter (one group of agents) are generalized to a collective consisting of an arbitrary number of groups, and for this model, statements about finding the NE through the agent threshold distribution function are proved. The existence conditions and the number (as well as the maximum possible number) of NE, as well as their structure, are investigated. Pareto-effective equilibria are found. Models of indicator behavior are studied and the convergence of its recurrent procedure to one of the NEs is proved.

Keywords: binary collective behavior, social interaction, Granovetter model, Schelling model, game-theoretic model, Nash equilibrium, indicator behavior, operator fixed point.

УДК 519.83
ББК 22.18
DOI: 10.25728/ubs.2022.99.1

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.Г. Чхартишвили.

Поступила в редакцию 14.06.2022.
Дата опубликования 30.09.2022.